CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN EL USO DE EJEMPLOS. ESTUDIO SOBRE LA NATURALEZA DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

SPECIALIZED KNOWLEDGE OF THE MATHEMATICS TEACHER IN THE USE OF EXAMPLES. STUDY ON THE NATURE OF THE SOLUTIONS OF THE QUADRATIC EQUATION

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NA UTILIZAÇÃO DE EXEMPLOS. ESTUDO SOBRE A NATUREZA DAS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO QUADRÁTICA

Nicolás Sánchez Acevedo
ORCID 0000-0002-0665-6102
Universidad Central de Chile, UCENTRAL
Universitat de València, UV
Santiago, Chile • Valencia, España
nicolas.sanchez@ucentral.cl

Carlos Segura
ORCID 0000-0002-1457-5740
Universitat de València, UV
Valencia, España
carlos.segura@uv.es

Luis Carlos Contreras
ORCID 0000-0002-0044-2365
Universidad de Huelva, UHU
Huelva, España
lcarlos@uhu.es

Leticia Sosa Guerrero
ORCID 0000-0002-4905-6684
Benemérita Universidad Autónoma de Zacatecas, UAZ
Zacatecas, México
lsosa@uaz.edu.mx

Resumo. El conocimiento del profesor de Matemáticas es un campo que ha suscitado el interés en investigación desde hace décadas, tanto en su dimensión disciplinar, como didáctica. La base seminal, en la especificidad del conocimiento para la enseñanza, se origina con los trabajos de Lee Shulman, quien acuñó y problematizó el conocimiento didáctico del contenido, como necesario en el profesor, para enseñar la disciplina. Sus aportes son el cimiento para modelos actuales más específicos, en los que el uso de ejemplos y analogías tienen un papel relevante en el aprendizaje de los estudiantes. En este trabajo nos apoyamos del Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) para caracterizar el conocimiento de una profesora de Matemáticas en el uso de ejemplos para la enseñanza sobre la naturaleza de las soluciones de ecuaciones cuadráticas (discriminante). Desde un paradigma interpretativo pretendemos comprender, en profundidad, cuál es el conocimiento especializado manifestado de una profesora de Matemáticas, a través del estudio de un caso instrumental con análisis basados en observaciones de aula. Algunos de los resultados, dan cuenta de que en el conocimiento matemático (MK) manifestado, predomina el conocimiento de los temas (KoT-procedimientos), como también se identifican algunos indicios de conocimiento sobre la estructura matemática (KSM). En cuanto al conocimiento didáctico del contenido (PCK), se evidencian conocimientos en los subdominios: características del aprendizaje (KFLM), de la enseñanza (KMT) y secuenciación (KMLS). Tanto el conocimiento matemático, como el didáctico se relacionan a partir del tipo de ejemplos seleccionados en la enseñanza de la naturaleza de las soluciones de la ecuación cuadrática.

Palavras-chave: conocimiento especializado del profesor de matemáticas; ecuación cuadrática; profesor de matemáticas; cualitativo; estudio de caso.

Abstract. The knowledge of the Mathematics teacher is a field that has aroused research interest for decades, both in its disciplinary and didactic dimensions. The seminal basis, in the specificity of knowledge for teaching, originates with the work of Lee Shulman, who coined and problematized didactic content knowledge, as necessary for the teacher to teach the discipline. His contributions are the foundation for more specific current models, in which the use of examples and analogies play a relevant role in student learning. In this work we rely on the Mathematics Teacher Specialized Knowledge Model (MTSK) to characterize the knowledge of a Mathematics teacher in the use of examples for teaching about the nature of solutions to quadratic equations (discriminant). From an interpretive paradigm we aim to understand, in depth, what is the manifested specialized knowledge of a Mathematics teacher, through the study of an instrumental case with analysis based on classroom observations. Some of the results show that in the mathematical knowledge (MK) manifested, knowledge of the topics (KoT-procedures) predominates, as well as some indications of knowledge about the mathematical structure (KSM). Regarding the didactic knowledge of the content (PCK), knowledge is evident in the subdomains: characteristics of learning (KFLM), of teaching (KMT) and sequencing (KMLS). Both mathematical and didactic knowledge are related based on the type of examples selected in the teaching of the nature of the solutions of the quadratic equation.

Keywords: mathematics teacher´s specialized knowledge; quadratic equation; math teachers; qualitative; case study

1. INTRODUCCIÓN

Desde los trabajos de Shulman (1986; 1987), se ha discutido sobre la necesidad y la importancia que tiene el conocimiento práctico para la enseñanza, el cual no puede reducirse sólo al conocimiento de la propia disciplina. En este contexto, diversos trabajos se han centrado en explorar, comprender y profundizar en el conocimiento del profesor de matemáticas para la enseñanza (e.g., Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2018). Es relevante seguir profundizando en el estudio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, pues existe consenso sobre su impacto en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Ball et al., 2005). Es justamente este conocimiento el que hace posible la toma consciente de decisiones sobre el qué, el cómo y el para qué enseñar cierto contenido matemático (Shulman, 1986).

Saber el qué, cómo y para qué enseñar un contenido matemático permite justificar el uso de recursos, estrategias, analogías, técnicas o ejemplos, de acuerdo con los objetivos de enseñanza (generales) y los contenidos (específicos). Este último aspecto no es trivial, pues Shulman (1986), ya hacía alusión a que, como parte del conocimiento didáctico para la enseñanza, el uso de ejemplos, metáforas y analogías son elementos indiscutibles para representar conceptos y/o procedimientos en relación con lo que se espera que aprendan los estudiantes.

En este sentido, los ejemplos juegan un rol relevante en la enseñanza de conceptos, procedimientos y/o ejercicios, los que permiten una familiarización con ideas nuevas y el desarrollo de procedimientos elementales (Rowland et al., 2009). El término ejemplo tiene múltiples usos en la educación matemática (Watson y Mason, 2002) y son usados de manera amplia en el contexto escolar (Figueiredo y Contreras, 2013). Su uso está condicionado a la finalidad y los objetivos que se pretenden desarrollar en relación con el contenido matemático.

Si bien, es cierto que podemos interpretar que el uso de ejemplos por parte de los profesores puede ser una tarea casi inconsciente, su uso no es trivial (Zaslavsky, 2019), pues la presentación de ejemplos para enseñar cierto contenido o concepto matemático requiere de un conocimiento sobre qué ejemplos pueden ser más idóneos en relación con alguna característica específica que se pretenda enseñar del contenido matemático particular (Huckstep et al., 2002).

Del mismo modo, Figueiredo et al. (2012) plantean que el conocimiento sobre los ejemplos y su naturaleza es relevante para la enseñanza y la intencionalidad que se da a esos ejemplos. De acuerdo con esto, es necesario explorar en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2018) manifestado en los ejemplos para la enseñanza, dado que la *conciencia* que tienen los profesores sobre los ejemplos utilizados depende en gran medida de qué se quiere mostrar y resaltar (Zodik y Zaslavsky, 2007).

Con base en lo expuesto, y dada la importancia que tienen los ejemplos y su uso en el aula de matemáticas, nos planteamos como objetivos: (1) describir el conocimiento especializado de una profesora de matemática de secundaria en el uso de ejemplos durante la enseñanza de la naturaleza de las soluciones de ecuaciones cuadráticas; y (2) explorar las posibles relaciones entre los subdominios del conocimiento matemático (MK) y del conocimiento didáctico-matemático (PCK).

Estos objetivos permitirán aportar conocimiento a un tema que, en el contexto de las ecuaciones cuadráticas, ha sido poco investigado (Vaiyavutjamai y Clements, 2006).

2. PERSPECTIVA TEÓRICA

En esta investigación se fundamenta en dos referentes teóricos. El primero es el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas; el segundo, la investigación sobre ejemplos y su uso en la enseñanza de las matemáticas.

El modelo Mathematics Teachers' Specialized Knowledge ([MTSK] Carrillo et al., 2014; Carrillo et al., 2018) considera como articulador la especialización en el conocimiento del profesor de matemáticas, tanto entre dominios, como en subdominios. El MTSK no alude a alguna otra ciencia o profesión, pues considera los conocimientos profesionales (didácticos y matemáticos) como aquellos necesarios que el profesor necesita y que utiliza debido a la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas (Liñan-García et al., 2021). En este sentido, la especialización del conocimiento es vista como un todo orgánico y holístico que emerge en una estructura dinámica, situada y adaptada al contexto en el cual el profesor se desenvuelve (Scheiner et al., 2017).

El modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (Figura 1) se organiza en dos dominios de conocimiento que caracterizan la labor del profesor de Matemáticas con una visión especializada: por una parte, el dominio de Conocimiento Matemático (Mathematical Knowledge [MK]), y por otra, el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (Pedagogigal Content Knowledge [PCK]). Estos dos dominios se relacionan, particularmente, con los contenidos matemáticos para la enseñanza. Tanto el MK como el PCK están influenciados por las creencias de los profesores (al centro del modelo, como un tercer dominio) en relación con las matemáticas, y la enseñanza y aprendizaje (Carrillo et al., 2018).

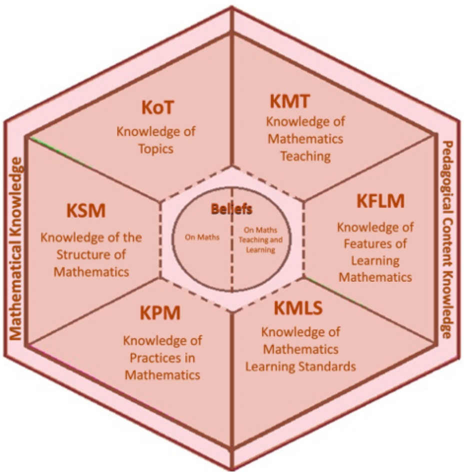

Figura 1. El modelo MTSK
Fuente: Carrillo et al. (2018)

DOI http://dx.doi.org/10.14571/brajets.v17.n3.1171-1183
ISSN 2316-9907

Dominios y subdominios del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

El Dominio del Conocimiento Matemático (MK) se compone por los subdominios (Carrillo-Yañez et al., 2018, pp. 6-10):

- *El Conocimiento de los temas (KoT)*, se refiere a un conocimiento profundo y fundamentado del contenido matemático. Se trataría de conocer el contenido concreto que se pretende aprendan los alumnos, con un nivel de profundización mayor. Incluye el conocimiento de relaciones intraconceptuales, esto es, relativas a un mismo tema.
- *El Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)*, se incluye el conocimiento de las principales ideas y estructura de la matemática y de las conexiones entre contenidos, conexiones de simplificación, complejización, transversales y auxiliares.
- El Conocimiento de las Prácticas Matemáticas (KPM), es el conocimiento de cómo se procede cuando se hace Matemáticas, su sintaxis; por ejemplo, cómo se define o cómo se demuestra.

El Dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) se compone por los subdominios (Carrillo-Yañez et al., 2018, pp. 11-13):

- *El Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)*, parte de la necesidad que poseen los profesores de entender cómo piensan sus alumnos al realizar actividades y cuestiones matemáticas (dificultades de aprendizaje y modos de pensamiento), y está centrado en cómo las matemáticas son aprendidas (Carrillo, Contreras et al., 2013). Puede ser un conocimiento fundamentado, en teorías sobre el aprendizaje matemático o en la reflexión del profesor sobre su experiencia.
- *El Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)*, se refiere al conocimiento sobre lo que está estipulado que aprenda un estudiante y con qué nivel de profundidad. Además del currículo prescriptivo, puede provenir de otros documentos sobre estándares de aprendizaje (o las medidas externas de exámenes o pruebas evaluadoras externas al centro, como podrían ser las pruebas PISA) e investigaciones que aportan recomendaciones al respecto.
- *El Conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas (KMT)*, lo conforman los conocimientos que posee el profesor sobre representaciones del contenido de cara a su enseñanza. Incluye, entre otros, el conocimiento de ejemplos, recursos, actividades, y su potencialidad.

Como se puede ver, el conocimiento sobre los ejemplos y su uso ocupan un papel relevante en el modelo, específicamente en la categoría del KMT, pues forma parte de los mecanismos de enseñanza de los que se puede valer el profesor en la enseñanza de los contenidos matemáticos específicos.

3. USO DE EJEMPLOS PARA LA ENSEÑANZA

La palabra ejemplo se utiliza en variados contextos y con diferentes fines. Algunos autores han aportado diversas conceptualizaciones sobre la idea de *ejemplo*, y están centradas en el contenido matemático que se ejemplifica (Watson y Mason, 2002; Zodik y Zaslavsky, 2008).

En este trabajo compartimos la idea de *ejemplo* planteada por Figueiredo (2010), como "un elemento de una colección de objetos (entes) que es utilizado en una determinada situación de enseñanza/aprendizaje, la que evidencia determinada, o determinadas, características" (p. 36).

El uso de ejemplos que evidencien (ejemplifiquen) lo que se pretende mostrar (objetivo del ejemplo) está condicionado al conocimiento matemático y didáctico del profesor (Zodik y Zaslavsky, 2008). De hecho, la toma de decisiones en relación con los ejemplos utilizados para la enseñanza es una estrategia didáctica para dar apoyo a los estudiantes, dar sentido y conectar

DOI http://dx.doi.org/10.14571/brajets.v17.n3.1171-1183
ISSN 2316-9907

significativamente con el aprendizaje (Muir, 2007). De acuerdo con esto, no basta con seleccionar y usar ejemplos en el proceso de enseñanza, también es indispensable que el profesor movilice su conocimiento para comunicar lo que se quiere comunicar a través de ellos. Así, son fundamentales tanto el discurso matemático como el tipo de ejemplos integrados para lograr el objetivo.

En este sentido, la tipología de ejemplos depende del momento de la clase, el objetivo y/o la intencionalidad. Varios autores han dado cuentas de diferentes categorizaciones y tipologías de ejemplos (e.g. Rowland, 2008; Watson y Mason, 2002), pero en este trabajo nos enfocamos en los ejemplos instruccionales propuestos por Zaslavsky (2010), quien los define como "un ejemplo que es ofrecido por el profesor y que presenta una relación entre el contexto y un tópico particular de aprendizaje" (p. 107).

De acuerdo con los ejemplos instruccionales (Zaslavsky, 2010), pueden emerger diferentes tipos de ejemplos derivados de la definición de ecuación cuadrática. Stewart et al. (2010, pp.46-47) la define como: Consideremos la ecuación cuadrática definida por $ax^2 + bx + c = 0$; donde $a \neq 0$. Las soluciones o raíces de la ecuación están dadas por la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

a) Puede haber dos soluciones diferentes de la ecuación, $x = \lambda_1$ y $x = \lambda_2$, lo cual se tiene cuando el discriminante de la ecuación es positivo, esto es $b^2 - 4ac > 0$.
b) Puede haber una solución (doble) de la ecuación, que es el caso cuando el discriminante es nulo, esto es $b^2 - 4ac = 0$.
c) Puede no tener soluciones reales, que es el caso cuando el discriminante es negativo, esto es $b^2 - 4ac < 0$, y en tal caso la expresión $ax^2 + bx + c$ es siempre positiva o negativa. Para verificar el signo de la expresión es suficiente con evaluar la expresión en $x = 0$ y el signo del valor es el mismo en todos los argumentos reales.

En este contexto, un ejemplo instruccional, puede ser tomar una ecuación cuadrática con coeficientes reales para ejemplificar el uso de la fórmula y mostrar soluciones reales y diferentes, considerando la naturaleza.

4. METODOLOGIA

En este trabajo adoptamos un enfoque cualitativo bajo un paradigma interpretativo (Yin, 2003). Este enfoque lo adoptamos por aportarnos profundidad en las interpretaciones de un fenómeno de estudio, en este caso, el conocimiento especializado en el uso de ejemplos sobre la naturaleza de las soluciones de ecuaciones cuadráticas. El diseño es un estudio de caso instrumental (Stake, 2008), dado que nuestro acercamiento consiste en comprender en profundidad el conocimiento especializado de Jenny (seudónimo que usamos) cuando usa ejemplos en la enseñanza sobre la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas.

La elección de la profesora responde a dos motivos relevantes: el primero es su voluntad de participar en el trabajo y accesibilidad (Loughran et al., 2008); el segundo es su trayectoria profesional, pues se trata de una Licenciada en Ciencias de la Ingeniería que ha continuado sus estudios en educación para obtener la titulación de profesora de Matemática de secundaria. Al momento de la recolección de datos, contaba con cuatro años de experiencia profesional realizando clases en enseñanza secundaria, específicamente en tercer grado de secundaria (16 a 17 años).

5. RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

Para la recolección de los datos en el uso de ejemplos en la enseñanza de la naturaleza de las soluciones de ecuaciones cuadráticas, consideramos las videograbaciones de clases, por medio de la observación no participante (Cooper y Schindler 2001), y las respectivas transcripciones de clases, de manera fidedigna. Usamos la triangulación de investigadores,

DOI http://dx.doi.org/10.14571/brajets.v17.n3.1171-1183
ISSN 2316-9907

considerando el equipo que conforma este trabajo, quienes tiene formación y amplia experiencia en didáctica de la matemática y en el modelo MTSK. Como parte de un proyecto de mayor alcance, en el que se grabaron doce clases de ecuación y función cuadrática (año 2019), mostramos el análisis y la interpretación de una de esas clases, donde Jenny enseñó la naturaleza de las soluciones de ecuaciones cuadráticas (discriminante). La profundidad en las interpretaciones es de lo que nos provee la investigación cualitativa al permitirnos adentrarnos en el fenómeno de estudio.

Esta clase en particular (clase cinco de doce) tuvo como objetivo: *reconocer y calcular el discriminante de una ecuación cuadrática* y tuvo una duración de 70 minutos. Para el análisis de los datos, primero identificamos cada uno de los ejemplos instruccionales usados por Jenny en la enseñanza del discriminante (naturaleza de las soluciones de ecuaciones cuadráticas). Estos ejemplos ilustraron cada uno de los tipos de soluciones de una ecuación cuadrática: reales y diferentes ($\Delta > 0$), reales e iguales ($\Delta = 0$) y complejas ($\Delta < 0$). Para el análisis de las transcripciones nos apoyamos de la técnica de análisis de contenido (Bardín, 1996), siguiendo las etapas propuestas por Johnson et al. (2014): descripción, análisis e interpretación.

Así, las transcripciones fueron divididas en episodios en relación con los ejemplos instruccionales usados por Jenny. Estos episodios fueron segmentados en unidades de información más pequeñas para la identificación de **evidencias** (en negrita), e *indicios* (en cursiva) y oportunidades (normal) de conocimiento especializado que movilizó la profesora en el uso de ejemplos, identificando los subdominios de MTSK movilizado por Jenny en la utilización del ejemplo. Una vez identificados y descritos los subdominios de conocimiento evidenciados, buscamos establecer relaciones entre ellos.

Como toda actividad científica, las metodologías cualitativas deben ser sistemáticas y cumplir con criterios de rigurosidad, autenticidad y validez. Dado esto, esta investigación se rigió por algunos criterios regulativos propuestos por Rodríguez y Valldeoriola (2007, pp. 74-75), como la veracidad, la aplicabilidad, la consistencia, y la neutralidad.

6. RESULTADOS

En este apartado mostramos los tres episodios analizados (ejemplos instruccionales) en el orden en que fueron apareciendo en la enseñanza de la naturaleza de las soluciones de la ecuación cuadrática (discriminante). El primero (Episodio 1), corresponde al ejemplo instruccional de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros y soluciones reales y diferentes; el segundo ejemplo (Episodio 2), corresponde a una ecuación cuadrática con coeficientes enteros y solución doble; y el tercer ejemplo (Episodio 3), corresponde a una ecuación cuadrática con coeficientes enteros y soluciones no reales.

2.1. El Conocimiento Especializado de Jenny movilizado en el uso de ejemplos

Jenny inicia la clase comentando a los estudiantes, en términos generales, que aquellos que no lograron comprender el tema de la ecuación cuadrática en clases anteriores, deberán profundizar, realizando un repaso de los contenidos para profundizar los contenidos. La profesora remarca esto porque sabe que los contenidos posteriores del programa de estudio de tercero medio hacen necesario que los estudiantes conozcan estos *(KMLS-secuenciación con temas posteriores)*.

Al iniciar la clase, la profesora trabaja con los estudiantes el reconocimiento y cálculo del discriminante de la ecuación cuadrática para que comprendan la naturaleza de las soluciones y las propiedades que la definen. Para ello comienza mostrando la fórmula para calcular las soluciones de una ecuación cuadrática $\left(x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$ y propone los siguientes tres ejemplos instruccionales de ecuaciones cuadráticas:

Br. J. Ed., Tech. Soc., v.17, n.3, Jul-Sep, p.1171-1183, 2024
DOI http://dx.doi.org/10.14571/brajets.v17.n3.1171-1183
ISSN 2316-9907

- Ejemplo 1: $9x^2 - 81 = 0$
- Ejemplo 2: $x^2 - 2x + 1 = 0$
- Ejemplo 3: $x^2 - 2x + 6 = 0$

En la primera parte de la clase (10 min. aprox.), los estudiantes deben resolver, por alguno de los métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas (método de la fórmula o factorización de trinomios), los ejemplos que propone Jenny, para luego revisarlas en la pizarra. Este proceso emerge como una oportunidad para explorar en el conocimiento de la profesora en relación con formas de interacción con el contenido matemático (KFLM).

Luego del trabajo realizado por los estudiantes, Jenny escribe los ejemplos en la pizarra, uno por uno, y comienza a resolverlos en interacción con los estudiantes. Mostramos el MTSK de la profesora movilizado en cada uno de estos ejemplos (episodios).

Ejemplo 1: $9x^2 - 81 = 0$	**Contexto**: con este ejemplo de ecuación cuadrática incompleta ($b = 0$), Jenny inicia su clase. Este ejemplo tiene dos soluciones reales y distintas. Le da a sus estudiantes unos minutos para que lo resuelvan y puedan extraer algún tipo de conclusión.

2.2. Episodio 1 de la clase

Estudiante: [Una estudiante resuelve por factorización el ejemplo $9x^2 - 81 = 0$ mostrando este desarrollo 9___ (x - 9) = 0 (error procedimental)].

Jenny: Okey, lo que aparece aquí [9___ (x - 9) = 0 *(este error lo corrige la profesora derivado del desarrollo de una estudiante)*], ella (la estudiante) recordó y dijo bueno, voy a sacar factor común ¿sí? [señala la expresión $9x^2$ - 81 = 0], antes lo había hecho con equis, ahora lo hizo con nueve. Resulta que ahí se cumpliría una ecuación que no tiene solución, porqué me daría que nueve es igual al cero [9 = 0] y eso [pausa] no es correcto ¿cierto?

A partir del comentario realizado por Jenny, otro estudiante se dirige a la pizarra y realiza la resolución de la ecuación correctamente.

Estudiante: [estudiante efectúa el siguiente desarrollo]

$9x^2 - 81 = 0$[1] $\Rightarrow x^2 = \frac{81}{9} = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \Rightarrow$ x = 3

Jenny: Okey, revisemos entonces. Lo que hace el Nico (estudiante), cierto, es equilibrar, dejar el ochenta y uno, sumar ochenta y uno a ambos lados y dividir por nueve. Calcula ochenta y uno dividido en nueve y eso le da nueve, cierto, que es este nueve [se refiere al término $\sqrt{9}$] Luego aplica raíz cuadrada positiva y negativa a ambos lados y obtiene los valores [mejora el procedimiento agregando $\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$ / $\pm\sqrt{}$]. Equis uno es igual a tres y equis dos es igual a menos tres, ¿sí? [escribe x_1=3 y x_2=-3] [verbaliza el error del estudiante al anotar en el radical el símbolo $\pm$].

Estas dos partes del Episodio 1, relativas a la resolución del primer ejemplo, Jenny muestra evidencias del dominio MK y del PCK. Jenny manifiesta conocimientos sobre **procedimientos (KoT)**, dado que conoce cómo resolver la ecuación cuadrática por medio de la factorización; asimismo moviliza conocimientos de **fortalezas y dificultades (KFLM)**, pues vemos que conoce los errores típicos de los estudiantes (en este caso la extracción del factor común), destacando a los estudiantes dónde estuvo el error por parte de la primera estudiante. Así,

[1] Interesante sería reflexionar sobre si $9x^2$ - 81 = 0 es un buen ejemplo para ecuaciones con b=0, dado que el coeficiente 9 en x puede inducir a errores en la resolución al coincidir con el radical de 81.

DOI http://dx.doi.org/10.14571/brajets.v17.n3.1171-1183
ISSN 2316-9907

cuando Jenny realiza la factorización, es enfática en mencionar que si el factor común de la ecuación cuadrática fuera sólo el 9, llegaría a una contradicción en 9=0 (KPM-formas de validación y demostración); esto podría darnos la oportunidad de explorar en el cocimiento especializado sobre la validación del procedimiento en términos matemáticos.

En la segunda parte, cuando el segundo estudiante va a la pizarra, la profesora da cuenta del procedimiento (adecuado) que muestra paso a paso el alumno. Vemos que la profesora conoce los procedimientos **(KoT - ¿cómo se hace? y ¿poque se hace así?)** en la resolución de la ecuación cuadrática, dando cuenta de algoritmos convencionales, fundamentando los procedimientos sobre el factor común de la expresión, y cuál es el factor común correcto.

Finalmente vemos que Jenny conoce el error que comete el estudiante al no anotar el signo $\pm$ en el radical **(KFLM-fortalezas y dificultades)**, y con ello mejora y complementa el desarrollo efectuado por el estudiante al aplicar la raíz cuadrada en la igualdad (positiva y negativa), para así obtener las dos soluciones de la ecuación. En relación con el uso de símbolos, Jenny podría conocer el *papel de los símbolos y uso de lenguaje formal (KPM)* en la resolución de ecuaciones cuadráticas.

En este Episodio 1 podemos, por lo tanto, establecer una relación clara entre el KFLM y el KoT de la profesora en el uso de este ejemplo instruccional (Figura 2). Esto es así porque muestra los aspectos procedimentales y conceptuales de este tipo de ecuación en la interacción que hace con los estudiantes, destacando los errores que cometen, y además, los refuerza con los procedimientos que realiza en la enseñanza. En esta relación de conocimiento parecería que es el KoT el que activa el KFLM, aunque ambos subdominios parecen estar sustentados en el KMLS (la secuenciación inicial que realiza la docente).

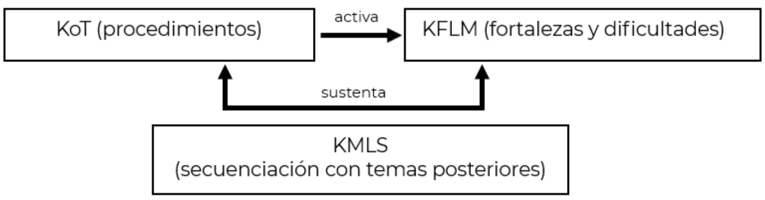

Figura 2. Relaciones de conocimiento del episodio 1
Elaboración propia

Ejemplo 2: $x^2 - 2x + 1 = 0$

Contexto: este es el segundo ejemplo de Jenny. Es una ecuación cuadrática completa que tiene soluciones reales e iguales ($x_1 = x_2$). Les da sus estudiantes unos minutos para que lo resuelvan y puedan sacar algún tipo de conclusión. Un estudiante va a la pizarra y resuelve.

2.3. Episodio 2 de la clase

Es: [el segundo estudiante resuelve por factorización el ejemplo 2]

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-1) \Rightarrow x-1=0 \wedge x-1=0 \Rightarrow x=1 \wedge x=1$

Jenny: Le vamos a poner numeritos a las soluciones si, para poder identificar [Anota $x_1=1 \wedge x_2=1$]. ¡Muy bien! Aplica método de factorización. Dice, dos números que multiplicados den uno [señala el coeficiente c=1], sumados o restados me den menos dos [señala el coeficiente b=-2] Menos uno, menos uno, calcula ambas soluciones … [corrige la falta de igualdad a cero en el desarrollo de la estudiante] Y ve esta ecuación [le dice a los estudiantes del curso] para sacar que las soluciones son uno, y la otra solución también es uno ¿si?

De este episodio, observamos evidencias de conocimiento de Jenny sobre los temas **(KoT-procedimientos)** y conocimiento sobre características del aprendizaje de las matemáticas

DOI http://dx.doi.org/10.14571/brajets.v17.n3.1171-1183
ISSN 2316-9907

(KFLM-fortalezas y dificultades). Se observa del episodio que la profesora, ante el desarrollo que realiza el estudiante, va explicando paso a paso cada uno de los procedimientos que éste realiza, es decir, tiene conocimiento sobre procedimientos (¿cómo se hace?). Resuelve la ecuación de segundo grado (trinomio cuadrado perfecto) por medio de una factorización del tipo $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ con solución en los números enteros.

De este mismo episodio, Jenny conoce sobre **fortalezas y dificultades (KFLM)** de los estudiantes, pues cuando el estudiante se dirige a la pizarra y resuelve la ecuación, poniéndola como el cuadrado de un binomio, en el segundo paso olvida igualar a cero (x-1)(x-1) *(aquí el estudiante no iguala a cero*). Vemos que Jenny sabe que, al no rectificar el error del estudiante, matemáticamente no se puede determinar las soluciones de la ecuación cuadrática, pues quedaría sólo en una expresión algebraica. A partir de la resolución de la ecuación por parte del estudiante, identificamos que Jenny conoce el papel del signo igual en la resolución de la ecuación cuadrática **(KPM-papel de los símbolos y uso de lenguaje formal)**, dado que lo hace visible al seguir los procedimientos del estudiante.

En este Episodio 2, a partir del trabajo de estudiante, la profesora activa y moviliza tres subdominios del conocimiento especializado; observamos, además, que están relacionados entre sí: el conocimiento del KoT (procedimientos) hace emerger conocimiento sobre el KFLM (fortalezas y dificultades) y, a partir de éste, se activa el KPM (papel del símbolo de la igualdad y uso correcto de lenguaje formal) de la profesora (Figura 3).

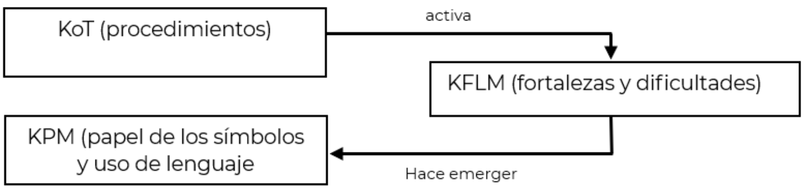

Figura 3. Relaciones de conocimiento del episodio 2
Elaboración propia

Ejemplo 3: $x^2-2x+6=0$

Contexto: este es el tercer ejemplo propuesto por Jenny. Les pide a sus estudiantes que traten de resolver y saquen conclusiones sobre las soluciones. Es una ecuación cuadrática con soluciones en los complejos.

2.4. Episodio 3 de la clase

Jenny: Tenemos que identificar el coeficiente a que es uno, el coeficiente dos, perdón, be que es menos dos y el coeficiente ce que es seis ¿sí? Luego aplica la fórmula ¿cierto? Y dice, menos be, que sería menos y menos dos, por eso le queda positivo, más menos, be al cuadrado, sería menos dos al cuadrado, que sería cuatro, menos, cuatro por a por ce. Entonces cuatro por a por ce, negativo. Cuatro, por a, que es uno, por ce que es seis, y seis por cuatro veinticuatro, por eso le da ese veinticuatro. Cuatro menos veinticuatro, menos veinte, y abajo dos a, dos por uno, dos. Entonces solución uno, dos positivo, la raíz de menos veinte, dividido en dos [escribe $x_1=\frac{2+\sqrt{-20}}{2}$] Y el otro, equis dos, dos positivo, raíz de menos veinte, partido en dos, ya. [escribe $x_2=\frac{2-\sqrt{-20}}{2}$].

En este episodio Jenny resuelve la ecuación cuadrática usando la fórmula **(KoT-procedimientos)**, obteniendo soluciones complejas. En este caso no le pide a ningún estudiante que vaya a la pizarra, lo que puede ser indicio del conocimiento de la profesora sobre las *debilidades (KFLM)* que pueden tener los estudiantes sobre el cálculo de las raíces de la ecuación cuadrática con subradical negativo. Jenny sabe que la ecuación se debe resolver

Br. J. Ed., Tech. Soc., v.17, n.3, Jul-Sep, p.1171-1183, 2024
DOI http://dx.doi.org/10.14571/brajets.v17.n3.1171-1183
ISSN 2316-9907

aplicando la fórmula porque no se puede factorizar directamente, pues no tiene solución en los reales *(KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos)*, que puede ser usado como una técnica de enseñanza para ilustrar la naturaleza en este tipo de ecuaciones. Dado esto, inicia la explicación de la resolución de la ecuación, identificando los coeficientes *a, b* y *c* para evaluar en la fórmula general. Finaliza mostrando las soluciones de la ecuación cuadrática, que tiene radicales de números negativos. Con estas soluciones sigue la clase provocando los siguientes cuestionamientos en los estudiantes, abriendo el espacio para inducir los tipos de soluciones de las ecuaciones cuadráticas o su naturaleza.

> Jenny: Entonces, a grandes miradas todavía, … los tres ejercicios que hicimos fueron elegidos exclusivamente para obtener las tres distintas opciones que podemos tener de naturaleza de raíces.

De acuerdo con lo que menciona Jenny, vemos que es consciente de la selección de los tres ejemplos, lo que usa para inducir que aparezcan los tres tipos de soluciones que puede tener una ecuación cuadrática: reales y diferentes ($\Delta > 0$), reales e iguales ($\Delta = 0$), y complejas ($\Delta < 0$). La profesora conoce que una **estrategia de enseñanza** es secuenciar los ejemplos para que los estudiantes vayan conjeturando sobre los tipos de soluciones **(KMT)**. Además, apoyándose de las clases previas (en las que trabajó la factorización y el uso de la fórmula) conoce el papel que tienen ciertos ejemplos **(KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos)** para profundizar en el objetivo de la clase, el que consistía en introducir el discriminante de una ecuación cuadrática en relación con la naturaleza de las soluciones de ecuaciones cuadráticas. Esos ejemplos, además, han sido escogidos para no desviar el foco de ese objetivo y que los estudiantes no perdieran la atención en otros aspectos, como por ejemplo manipular los coeficientes fraccionarios de una ecuación cuadrática.

> Jenny: ¡Reales, muy bien! [anota = y reales] ¿Y por acá? [sobre el tercer ejemplo de soluciones $x_1 = \frac{2+\sqrt{-20}}{2}$ y $x_2 = \frac{2-\sqrt{-20}}{2}$] ¿Qué tipo de soluciones tuvimos?
> Es: Complejas.
> Jenny: Complejas, perfecto. Porque éstas vamos a trabajarlas después con números imaginarios que no forman parte de los números reales, ya. Por eso este menos veinte, después $x_2 = \frac{2-\sqrt{-20}}{2}$. Vamos a descubrir, la vamos a cambiar por una variablecita que es una "i". Entonces ahí vamos a ser complejas.

Como parte del Episodio 3, emerge una oportunidad para explorar en el conocimiento de la profesora sobre conexiones de complejización (KSM), pues Jenny deja entrever que cuando una ecuación cuadrática tiene soluciones complejas, éstas no forman parte del tratamiento en los números reales (en contexto escolar), adelantando que las cantidades subradicales negativas se trabajarán en profundidad en el tema de números complejos (contenido posterior). En el contexto de enseñanza, identificamos un indicio de conocimiento sobre *secuenciación con temas posteriores (KMLS)*, por parte de Jenny, pues deja ver que es un tema que se trabaja curricularmente en los siguientes temas del curriculum (sin hacerlo explícito). En este sentido, la indagación en las evidencias estaría en profundizar si la profesora conoce cómo están secuenciados estos temas – ecuaciones cuadráticas y números complejos–, al nivel del libro de texto o del programa de estudio (MINEDUC, 2015).

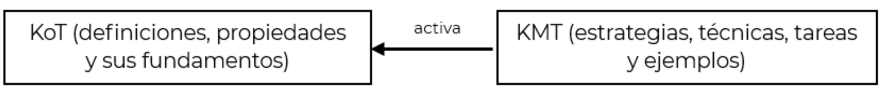

Figura 4. Relaciones de conocimiento del episodio 3
Elaboración propia

DOI http://dx.doi.org/10.14571/brajets.v17.n3.1171-1183
ISSN 2316-9907

En la Figura 4, en cuanto a las relaciones entre los subdominios que pueden establecerse en el Episodio 3, hemos observado que el conocimiento evidenciado a partir del uso de los tres ejemplos instruccionales de ecuaciones cuadráticas llevó a Jenny a movilizar **KMT (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos)**, conocimiento que lleva a la profesora a que los estudiantes logren dilucidar los tipos de soluciones de ecuaciones cuadráticas (naturaleza de las soluciones), es decir, mostrando que conoce sobre **definiciones, propiedades y fundamentos (KoT)**.

7. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

A partir del uso de ejemplos instruccionales (Zaslavsky, 2010) por parte de la profesora, logramos evidenciar la movilización de conocimientos especializados en los subdominios del PCK y MK. Encontramos aún más relevantes las relaciones de conocimiento que este tipo de ejemplos activan, tanto a nivel de ejemplos específicos en cada momento de la enseñanza, como a nivel de la estructura de la clase.

Con base en los trabajos de Liñan et al. (2016) y Sánchez-Acevedo et al. (2023), este tipo de investigación profundiza en qué conocimiento especializado (MTSK) entra en juego cuando se seleccionan y utilizan ejemplos instruccionales, describiendo cómo se da la acción de ejemplificar (que requiere poner en juego otros elementos) y las posibles relaciones que pueden emerger (Zakaryan et al., 2018).

Así, los ejemplos instruccionales utilizados por la profesora abren un espacio para profundizar en diferentes subdominios del MTSK. Específicamente, este tipo de ejemplos dan cuenta del KoT de la profesora, pues requieren la movilización de procedimientos, definiciones, propiedades y fundamentos, que ella *conscientemente* relaciona con el KFLM, afrontando las fortalezas y dificultades de sus estudiantes. La consciencia de la profesora en el uso de ejemplos instruccionales podría estar interconectada con el KMLS, dada la selección secuencial y organizada de los ejemplos, que favorece la enseñanza progresiva de la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas. Tanto el KoT, como el KFLM (posiblemente activado por el KMLS) da cuenta del conocimiento movilizado sobre KMT (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) en la clase, es decir, el conocimiento que tiene la profesora sobre los temas (procedimientos) y cómo los estudiantes interactúan con el contenido matemático, son los que activan los mecanismos de enseñanza.

En este mismo sentido, parece interesante destacar que el uso de los ejemplos instruccionales (1, 2 y 3), por parte de la profesora, deja ver la activación que se genera en el PCK a partir del MK (Episodio 2 y 3) y del MK a partir del PCK (Episodio 1), que coinciden con los reportado en investigaciones previas (e.g., Adler y Pournara, 2020; Sánchez-Acevedo et al., 2024).

Si bien este trabajo es un aporte a la investigación sobre la caracterización de qué conocimientos especializados del profesor de Matemáticas se movilizan en la selección y uso de ejemplos, y de las relaciones que se dan entre dichos conocimientos, consideramos la necesidad de extenderla a otros tópicos matemáticos. Además, tanto la selección y uso de ejemplos, de manera consciente e intencionada, puede dar señales de la práctica de ejemplificar, aspecto que *necesariamente* requiere de un desarrollo, tanto para profesores en formación, como en ejercicio. Esto no es menor, pues la selección y uso de ejemplos no necesariamente implica ejemplificar, y esto debe ser concientizado por el profesor de cara a su desarrollo profesional.

AGRADECIMENTOS

Este trabajo es parte del proyecto de I+D+i PID2021-122180OB-100, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE y ha sido vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

REFERENCIAS

Adler, J., & Pournara, C. (2020). Exemplifying with variation and its development in mathematics teacher education. En D. Potari & O. Chapman (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: volume 1. Knowledge, beliefs, and identity in mathematics teaching and teaching development* (pp. 329–353). Sense.

Bardín, L. (1996). *El análisis de contenido*. Akal Ediciones.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. doi:10.1080/14794802.2018.1479981

Cooper, D. C., y Schindler, P. S. (2001). *Business Research Methods* (seventh edition). New York: McGraw-Hill.

Figueiredo, C. (2010). *Los ejemplos en clase de matemáticas de secundaria como referente del conocimiento profesional* (Tesis Doctoral). Universidad de Extremadura, España.

Figueiredo, C.A., Contreras, L.C. & Blanco, L.J. (2012). La ejemplificación del concepto de función: diferencias entre profesores noveles y profesores expertos. *Educación Matemática*, *24* (1), 73-105.

Figueiredo, C. A. & Contreras, L. C. (2013). La función cuadrática: variación, transparencia y dos tipos de ejemplos. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 3*, 45-68.

Huckstep, P., Rowland, T. & Thwaites, A. (2002). *"Primary Teachers' Mathematics Content Knowledge: What does it look like in the Clasrroom?"*. Proceedings of BERA Conference. Exeter. http://education.pwv.gov.za/content/documents/

Liñan, M. M., Contreras, L.C. & Barrera, V. (2016). Conocimiento de los Temas (KoT). En J. Carrillo, L.C. Contreras & M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 12 -20). SGSE.

Loughran, J., Mulhall, P., & Berry, A. (2008). Exploring pedagogical content knowledge in science teacher education. *International Journal of Science Education*, *30*(10), 1301–1320. doi: 10.1080/09500690802187009

MINEDUC. (2015). *Bases curriculares de 7° básico a 2° medio*. Ministerio de educación, Unidad de curriculum y evaluación.

Muir, T. (2007). Setting a good example: Teacher's choice of examples and their contribution to effective teaching of numeracy. En J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice* (Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Hobart, pp. 513–522). Adelaide, SA: MERGA.

Rodríguez, D. y Valldeoriola, J. (2007). *Metodología de la investigación*. Universitat Oberta de Catalunya, España. Recuperado de http://zanadoria.com/syllabi/m1019

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. & Huckstep, P. (2009). Transformation: Using examples in mathematics teaching. En T. Rowland, F. Turner, A. Thwaites, & P. Huckstep (Eds), *Developing Primary Mathematics Teaching: Reflecting on Practice with the Knowledge Quartet* (pp. 67-100). London: Sage.

Sánchez-Acevedo, N., Sosa, L., & Contreras, L. C. (2024). Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas evidenciado en la selección y uso de ejemplos en la enseñanza de la ecuación cuadrática. *Bolema, 38,* 1-34. https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

Sánchez-Acevedo, N., Sosa, L. & Contreras, L. C. (2023). Posibles relaciones entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas con la ejemplificación. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 256-263). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L.S. (1987). *Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22. http://dx.doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Stake, R. E. (2008). Qualitative Case Studies. En N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Strategies of Qualitative Inquiry* (pp. 119-149). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Stewart, J., Redlin, L., y Watson, S. (2010). *Precálculo*. Thomson.

Vaiyavutjamai, P. & Clements, M. A. (2006). Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(1), 47-77. https://doi.org/10.1007/BF03217429

Watson, A., y Mason, J. H. (2002). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. En A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 377). PME.

Yin, R. (2003). *Case study research. Design and methods*. Sage Publications.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., FloresMedrano, E., & Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(2), 105–123. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260

Zaslavsky, O. (2019). There is more to examples than meets the eye: Thinking with and through mathematical examples in different settings. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 245-255. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.10.001

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2007). Exemplification in the mathematics classroom: what is it like and what does it imply? En D. Pitta, & G. Philippou (Eds.), *Proceeding of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2024–2033). ERME. http://erme.site/wpcontent/uploads/CERME5/WG12.pdf

Zodik, I., y Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 165–182. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9140-6