

LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA: O PONTO, A RETA E O PLANO DA GEOMETRIA EUCLIDIANA E A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

MATH TEXTBOOKS: POINT, LINE AND PLANE OF EUCLIDEAN GEOMETRY AND THE DIDACTIC TRANSPOSITION

Marcilio Martins de Oliveira 

Faculdade do Belo Jardim, FBJ
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS
Porto Alegre, RS, Brasil
marciliomo@gmail.com

Samuel Edmundo Lopez Bello 

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS
Porto Alegre, RS, Brasil
samuel.bello@ufrgs.br

Resumo. Este estudo apresenta uma discussão na área da Geometria Plana ou Euclidiana, tendo como enfoque os entes primitivos da Geometria Plana: o ponto, a reta e o plano. Como o próprio nome se refere essa Geometria é oriunda da obra do matemático grego Euclides de Alexandria, cujo trabalho remonta a aproximadamente 300 a.C. Como aporte teórico foi utilizada a teoria da Transposição Didática do francês Yves Chevallard (1991), essa teoria refere-se, em breves palavras, às mudanças e transformações que o saber sofre desde seu surgimento na comunidade científica até sua entrada na sala de aula. Foi realizada uma pesquisa em livros didáticos de matemática do 6º ano pertencente a diversas épocas. Na escolha dos livros didáticos de matemática, foram tomados como bases o ano de 1985, data em que ocorreu a criação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e o ano de 1996 data da implantação da nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira (LDB 9394/96). Os livros didáticos de matemática foram escolhidos por serem um dos meios utilizados para a entrada do saber na sala de aula. Na construção deste trabalho de pesquisa foi utilizada a pesquisa qualitativa e documental, os livros foram analisados um a um, no sentido de se entender como foi o processo de abordagem dos conceitos do ponto, da reta e do plano nos livros didáticos de matemática e na comunidade científica. O trabalho apresenta uma discussão teórica envolvendo os livros didáticos, o PNLD e a obra de Euclides - Os Elementos.

Palavras chave: livros didáticos; transposição didática; ponto; reta; plano

Abstract. This study presents a discussion on the area of plane geometry or non-Euclidean geometry, having as focus the primitive ones of plane geometry: point, line and plane. As the name itself refers to this geometry is from the work of the Greek mathematician Euclid of Alexandria, whose work dates back to approximately 300 BC. As theoretical contribution was the theory of Didactic Transposition the French Yves Chevallard (1991), this theory refers briefly to the changes and transformations that you know suffers from your appearance in the scientific community to your entry in the living room class. A research on textbooks of mathematics 6th grade belonging to several times. On choice of textbooks of mathematics, were taken as the basis year of 1985, the date on which the creation of the National Textbook Program (PNLD) and the year of 1996 date of implementation of the new guidelines and Bases of Brazilian Education (LDB 9394/96). The textbooks of mathematics were chosen because they are one of the means used for the input of knowledge in the classroom. In this research paper was used qualitative research and documentation, the books were analyzed one by one, in order to understand how was the process of addressing the concepts of point, line and plane in math textbooks and the scientific community. The paper presents a theoretical discussion involving the textbooks, the PNLD and the work of Euclid-Elements.

Keywords: textbooks; didactic transposition; point; straight; plan.

INTRODUÇÃO

A pesquisa apresentada neste artigo, apresenta um recorte de uma tese de doutorado, em andamento, do Programa de Pós-graduação em Ciências da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Segundo Lajolo (1996, p. 17), o livro didático assume certa importância dentro da prática de ensino brasileira nestes últimos anos, isso é notável, principalmente, em países como o Brasil, carentes de políticas públicas que consigam diminuir as desigualdades sociais: “a precaríssima situação educacional faz com que ele acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina.”

Sendo a entrada do saber em sala de aula, também por meio dos livros didáticos, especificamente na sala de aula de matemática do 6º ano do ensino fundamental, o olhar lançado neste estudo refere-se à questão dos entes primitivos da Geometria Euclidiana ou Plana, isto é, o ponto, a reta e o plano, sob a perspectiva da teoria da Transposição Didática proposta pelo francês Yves Chevallard, segundo Chevallard (1991, p. 33): “todo projeto social de ensino e de aprendizagem se constitui dialeticamente com a identificação e a designação de conteúdos de saberes a ensinar”.

Os conceitos de ponto, reta e plano surgem na obra de Euclides de Alexandria, Os Elementos, esse trabalho de Euclides, foi bastante estudado e passou por diversas revisões ao longo do tempo, sua criação remonta a aproximadamente 300 anos a.C. e deu surgimento ao que hoje é chamada de Geometria

Euclidiana ou Geometria Plana. Essa Geometria é estudada nas escolas pelos alunos da educação básica, principalmente por meio dos livros didáticos de matemática.

Com o aporte da teoria da Transposição Didática de Chevallard (1991) este estudo investigou as transformações e mudanças ocorridas nos conceitos de ponto, reta e plano abordados nos livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental. Os livros escolhidos para análise fazem parte do Programa Nacional do Livro Didático, esse programa foi criado em 1985, levando em consideração a nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira (LDB), promulgada no ano de 1996, isto é, os livros analisados são do ano de 1996 em diante. Para análise dos conceitos de ponto, reta e plano abordados nos livros didáticos de matemática do 6º ano, tomamos como base as sete primeiras definições do Livro I da tradução Os Elementos de Euclides, edição do ano de 2009, do professor Irineu Bicudo (1940 – 2018).

DESENVOLVIMENTO

As diversas civilizações antigas nos remetem as suas inquietações no sentido de tentarem resolver problemas do seu cotidiano, como por exemplo, pode-se citar a necessidade da criação dos números, quando os criadores de animais utilizavam as pedras para fazer a correspondência entre a quantidade de animais e das pedras, o surgimento do número se deu a partir do momento em que existiu a necessidade de contar objetos e coisas e isso aconteceu há mais de 30.000 anos.

Onde e quando essa fantástica aventura da inteligência humana começou? Na Ásia, na Europa ou em qualquer lugar da África? Na época do homem de Cro-Magno, há trinta mil anos? Ou no tempo do homem de Neandertal, há quase cinquenta milênios? Ou ainda há cem mil anos, talvez quinhentos mil, ou até por que não, um milhão de anos. Não sabemos de nada. O acontecimento se perde na noite dos tempos pré-históricos. (IFRHAR, 2005, p. 15)

Entendemos que a matemática surge da construção humana em diversas épocas e em diferentes civilizações, como é o caso da Geometria que aparece como uma construção humana, principalmente pelas necessidades cotidianas, dos egípcios de medirem e dividirem suas terras, em decorrência das cheias do rio Nilo. A Geometria desenvolveu-se ao longo do tempo e diversificou-se em vários ramos, a Geometria Euclidiana ou Plana, como o próprio nome faz menção refere-se ao ramo da geometria que se originou da obra de Euclides de Alexandria, os Elementos.

Originalmente, a palavra geometria significa medida de terra. Os antigos egípcios a usaram para medir suas terras às margens do Nilo. Os gregos a trataram com bases científicas. Euclides 300 a.C. reuniu os conhecimentos de geometria da época no seu famoso livro ELEMENTOS. (FREITAS & BOTELHO, 1974).

A Geometria desenvolveu-se ao longo do tempo e diversificou-se em vários ramos. Os estudos iniciais da Geometria Plana, que também pode ser denominada Geometria Euclidiana em homenagem a Euclides de Alexandria, se basearam nos conceitos de ponto, reta e plano. Sendo conceito entendido como:

Em geral, todo processo que possibilita descrição, a classificação e a previsão dos objetos cognoscíveis. Assim entendido, esse termo tem significado generalíssimo e pode incluir qualquer espécie de sinal ou procedimento semântico, seja qual for o objeto a que se refere, abstrato ou concreto, próximo ou distante, universal ou individual (ABBAGNANO, 2012).

Aprofundando, um pouco mais essa discussão, vejamos as primeira linhas do resumo de Eudemo:

Dizemos que, segundo a tradição geral, foram os egípcios os que primeiro inventaram a geometria, e que ela nasceu a partir da medição dos terrenos, que eles tinham que renovar continuamente pelo fato de as cheias do Nilo fazerem desaparecer os limites entre as propriedades. Em nenhum sentido se deve considerar assombroso que uma necessidade prática tenha produzido a invenção dessa e de outras ciências, por que tudo o que está submetido à geração procede do imperfeito ao perfeito. Há, portanto, um progresso natural da estimulação do raciocínio e deste à inteligência pura. Do mesmo modo, assim como o exato conhecimento dos números começou pelos fenícios em consequência do tráfico e das transações de que ocupavam, a geometria foi inventada pelos egípcios pela razão que acabo de me referir (LEVI, 2008).

Os conteúdos matemáticos contemplados nos livros didáticos de matemática, em sua maioria, ou na quase totalidade, contemplam o estudo da Geometria Euclidiana ou Geometria Plana. O trabalho de Euclides, Os Elementos, ao longo do tempo, foi contemplado com inúmeros estudos, passando por

diversas revisões, conseqüentemente os conceitos do ponto, da reta e do plano abordados nos livros didáticos de Matemática não se apresentam como surgiram na obra de Euclides, Os Elementos.

Na Antiguidade e na Idade Média, o modo de abordagem de uma obra e do seu ensino era o *Comentário*. De fato, um comentário ou exposição do pensamento de algum autor era um dos métodos básicos de ensino nas escolas medievais. E o comentário como instrumento pedagógico por excelência foi herdado tanto dos padres da Igreja quanto dos escritores árabes, e essas duas fontes têm a mesma origem: os escritos literários do último período do pensamento grego (BICUDO, 2009).

Segundo os PCNs (1998, p. 15), no currículo de Matemática do ensino fundamental os conceitos geométricos constituem parte importante, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vive.

A abordagem da Geometria Plana nos livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental, em geral apresenta os conceitos de ponto, reta e plano, esses conceitos fazem com que os alunos precisem usar a imaginação. A imaginação, segundo Abbagnano (2012, p. 18): “em geral ela tem a possibilidade de evocar ou produzir imagens, independente da presença do objeto a que se referem”.

De acordo com Aristóteles imaginação é:

Aristóteles definiu a imaginação nesses termos, sendo o primeiro a analisa-la em De anima (III, 3). Aristóteles distinguiu a Imaginação em primeiro lugar de sensação, em segundo lugar da opinião. Imaginação não é sensação por que uma imagem pode existir mesmo quando não há sensação, como por exemplo, no sono. Imaginação não é opinião porque a opinião exige que se acredite naquilo que se opina, enquanto isso não acontece com a imaginação, que, portanto, também pode pertencer aos animais. (ARISTÓTELES apud ABBAGNANO, 2012).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) enfatizam:

O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc (PCNs, 1998).

Atualmente, nos livros didáticos de Matemática, a parte da Geometria vem sendo introduzida, juntamente com os outros conteúdos dos respectivos anos, entretanto, ainda necessita de uma melhor adequação, nesse sentido tem-se:

Atualmente a geometria é um ramo da matemática e este conhecimento faz parte das propostas curriculares da educação básica. Percebe-se que os conteúdos relacionados a este geralmente são apresentadas nos capítulos finais dos livros didáticos de matemática. Observa-se, entretanto, que a geometria, apesar de ser um conhecimento necessário, pois ela permite enxergar, como, por exemplos as formas geométricas nas variadas situações do nosso cotidiano, seja em prédios, na natureza e etc., há um grande descaso do seu ensino nas escolas. (REVEMAT. Florianópolis (SC), v.12, n. 2, p. 115, 2017).

Nas décadas de oitenta e noventa do século passado, antes da criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, os livros didáticos de Matemática do ensino fundamental traziam a parte da Geometria no final do livro em um ou mais de um capítulo com o nome de Geometria. As aulas distribuídas para os alunos do 6º ano (5ª série) eram denominadas de Matemática e em sala de aula, o professor, administrava como trabalhar a parte geométrica.

Neste período, lecionava na educação básica, em turmas do ensino fundamental e do ensino médio, foi quando percebi, por meio de conversas com colegas de trabalho, que na sala de aula eles evitavam ensinar a parte de Geometria, por diversos motivos. Nestas conversas cotidianas com os colegas professores surgiram diversos comentários sobre o ensino da Geometria. Dentre vários comentários sobre o ensino da Geometria, entre os meus colegas, um comentário se tornou recorrente: *Geometria é muito difícil e complicada, não vejo necessidade de ser ensinada e os alunos também não gostam de Geometria e acham ela muito difícil e complicada. É uma coisa que a gente tem que ficar imaginando, inventando, por isso, fico só na parte de matemática (parte algébrica), pois Geometria requer muita abstração por parte dos alunos.*

Segundo Abbagnamo (2010, p. 142), abstração é: operação mediante a qual alguma coisa é escolhida como objeto de percepção, atenção, observação, consideração, pesquisa, estudo etc. e isolada de outras coisas com que está numa relação qualquer.

Desde que comecei a ensinar, na década de oitenta do século passado, ministrei aulas de matemática no 6º ano do ensino fundamental. Com o advento da Lei 12.796, de 4 de abril de 2013¹, a 5ª série do ensino fundamental passou a corresponder ao 6º ano do ensino fundamental, por esse motivo ficou estabelecido, nesse trabalho, que a nomenclatura “6º ano do ensino fundamental” corresponde também a nomenclatura “5ª série do ensino fundamental”, portanto, a primeira nomenclatura foi empregada para ambas. Sempre tive a percepção da Geometria como um ramo da matemática muito importante, no sentido de mostrar que necessitamos fazer abstrações e usar a nossa imaginação, além da importância prática inerente a própria Geometria. Além do contato com os livros didáticos que utilizei como professor em sala de aula, também exerci a função de coordenador de biblioteca escolar, manuseando livros de todos os gêneros e também os livros didáticos de matemática e de outras áreas do conhecimento.

Tendo esse contato direto com os livros didáticos de Matemática e refletindo sobre as questões que foram levantadas sobre o ensino da Geometria, com os meus colegas de trabalho, surgiu, então, a seguinte questão: *qual a abordagem dos conceitos de ponto, reta e plano da Geometria Euclidiana ou Geometria Plana nos livros didáticos de Matemática do 6º ano do ensino fundamental, utilizados em sala de aula, fornecidos pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)?*

METODOLOGIA

Dos princípios metodológicos

Este tópico apresenta os fundamentos metodológicos da pesquisa, incluindo por exemplo, a natureza da pesquisa qualitativa e documental, as etapas que foram traçadas para a realização da presente investigação. Para dar resposta a questão levantada no tópico anterior, foram pesquisados sete exemplares de livros didáticos de Matemática do 6º ano do ensino fundamental, a pesquisa desenvolvida tem cunho qualitativo, uma vez que a pesquisa qualitativa também apresenta características que correspondem ao nosso estudo.

A pesquisa qualitativa apresenta algumas características, porém elas não devem ser consideradas como regras rígidas que não podem ser transformadas, como exemplo dessas características, podemos citar a transitoriedade e a não neutralidade do pesquisador, entre outras. Segundo Oliveira (2003, p. 57): “A pesquisa qualitativa pode ser caracterizada como sendo uma tentativa de se explicar em profundidade o significado e características do resultado das informações obtidas através de entrevistas ou questões abertas, sem a mensuração quantitativa de características ou comportamento.”

Sendo esta pesquisa de abordagem qualitativa, para Garnica a pesquisa qualitativa tem características próprias que são apresentadas a seguir:

(a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios estáticos e generalistas (GARNICA, 2004).

Vale ressaltar que essas características elencadas por Garnica (2004) não devem ser consideradas como regras rígidas e que não possam sofrer transformações, uma vez que a pesquisa qualitativa está em constante movimento, se atualizando num mundo cada vez mais com acesso as informações e transformações, como bem enfatiza Borba:

Cabe ressaltar que as características acima não devem ser vistas como regras, visto que, de forma recursiva, o próprio entendimento do que é pesquisa qualitativa está em movimento e as noções

¹ Lei 12.796, de 4 de abril de 2013 (Altera a Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para dispor sobre a formação dos profissionais da educação e dar outras providências.), o Ensino Fundamental passa a ser composto por nove anos, com o ingresso do aluno a partir dos seis anos de idade ao invés dos sete anos exigidos anteriormente, nesse caso a 5ª série passa a corresponder ao 6º ano e a 6ª série ao 7º ano e assim sucessivamente. (BRASIL, 2018).

acima levam a ênfases diferentes. Assim, em harmonia com essas características, Araújo e Borba (2004) enfatizam que pesquisa qualitativa deve ter por trás uma visão de conhecimento que esteja em sintonia com procedimentos como entrevistas, análises de vídeos, etc. e interpretações. O que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa, prioriza procedimentos descritivos à medida que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. O que é considerado "verdadeiro", dentro desta concepção, é sempre dinâmico e passível de ser mudado. Isso não quer dizer que se deva ignorar qualquer dado do tipo quantitativo ou mesmo qualquer pesquisa que seja feita baseada em outra noção de conhecimento (BORBA).

A base empírica da pesquisa é do tipo documental, uma vez que a pesquisa foi realizada com sete livros didáticos de Matemática do 6º ano do ensino fundamental, esses livros didáticos são equivalentes a documentos, nesse sentido, temos:

São considerados documentos "quaisquer materiais escritos que possam ser usados como fonte de informação sobre o comportamento humano (Phillips, 1974, p. 187). Estes incluem desde leis e regulamentos, normas, pareceres, cartas, memorandos, diários pessoais, autobiografias, jornais, revistas, discursos, roteiros de programas de rádio e televisão até livros, estatísticas e arquivos escolares. (LUDKE, 1986)

A construção e/ou coleta de dados da pesquisa, foi realizada com base em uma análise documental, utilizando os livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental, essas fontes documentais sendo entendidas como:

São capazes de proporcionar ao pesquisador dados em quantidade e qualidade suficiente para evitar a perda de tempo e o constrangimento que caracterizam muitas das pesquisas em que os dados são obtidos diretamente das pessoas. Sem contar que em muitos casos só se torna possível realizar uma investigação social por meio de documentos (GIL, 2008).

Ampliando a discussão, ainda sobre a pesquisa documental, temos em Godoy:

Considerando, no entanto, que a abordagem qualitativa, enquanto exercício de pesquisa, não se apresenta como uma proposta rigidamente estruturada, ela permite que a imaginação e a criatividade levem os investigadores a propor trabalhos que explorem novos enfoques. Nesse sentido, acreditamos que a pesquisa documental representa uma forma que pode se revestir de um caráter inovador, trazendo contribuições importantes no estudo de alguns temas. Além disso, os documentos normalmente são considerados importantes fontes de dados para outros tipos de estudos qualitativos, merecendo portanto atenção especial (GODOY, 1995).

Considerados como documentos, os livros didáticos de Matemática do 6º ano do ensino fundamental, analisados nessa pesquisa, deram o suporte necessário, no sentido de conterem as informações sobre os conceitos de ponto, reta e plano para serem analisados, segundo Godoy (1995, p. 23), exame de materiais de natureza diversa, que ainda não receberam um tratamento analítico, ou que podem ser reexaminados, buscando-se interpretações novas e/ou complementares, constitui o que estamos denominando pesquisa documental.

Atitude procedimental para a pesquisa

Diversos procedimentos foram utilizados nessa pesquisa, por se constituir em uma pesquisa de abordagem qualitativa e documental, como não poderia deixar de ser, foi realizada uma busca extenuante na Internet nos sites de cunho acadêmico, houve uma busca em materiais no acervo pessoal do pesquisador e em bibliotecas escolares de escolas públicas nos municípios de Pesqueira, Caruaru e Belo Jardim todas do estado de Pernambuco, principalmente no tocante aos livros didáticos de Matemática.

Foram realizadas diversas pesquisas na Internet, em vários sites acadêmicos especializados na divulgação de materiais científicos, tais como: Google Scholar; Periódico CAPES; LILACS; Base de dados da USP e da UFRGS, Bioline International, ZMATH Online Database, Math WebSearch, MathGuide, BATD, entre outros. A investigação foi ampliada com visitas as bibliotecas da Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Faculdade de Belo Jardim (FBJ/PE), Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), bem como pesquisas em seus acervos online.

Na busca dos exemplares dos livros didáticos de matemática foi realizada uma busca no acervo do pesquisador, uma vez que com o tempo como professor de matemática do ensino fundamental e médio, o autor do texto, conseguiu armazenar uma quantidade razoável de materiais didáticos em seu acervo particular. Mesmo assim, essa procura no acervo pessoal não foi o suficiente para contemplar todos os livros didáticos de matemática necessários para a investigação, então foi necessário realizar busca do material em bibliotecas escolares e com professores de matemática.

O critério de escolhas desses livros didáticos de Matemática do 6º ano do ensino fundamental foram os seguinte:

a) livros que fazem parte do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), criado no início do ano de 1985 em substituição ao antigo Instituto Nacional do Livro Didático para o Ensino Fundamental do Instituto Nacional do Livro (Plidef/INL)²;

b) livros escritos após a implantação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que foi lançado em 1997.

Esse estudo foi realizado por meio de uma estruturação, ou seja, de etapas que para a realização dessa investigação seguiram as seguintes etapas:

1ª Etapa: leitura do Guia Nacional do Livro Didático (PNLD – 2017);

2ª Etapa: mapeamento dos livros didáticos;

3ª Etapa: seleção dos livros didáticos a serem utilizados;

4ª Etapa: construção das categorias analíticas;

5ª Etapa: análise dos dados.

Em seguida, apresentamos uma tabela contendo todos os locais de busca dos assuntos relacionados a pesquisa e uma tabela elencando todos os sete livros didáticos de Matemática analisados na pesquisa.

Tabela 1. Locais de busca da pesquisa.

ASSUNTOS PESQUISADOS	LOCAIS DE BUSCA
<ul style="list-style-type: none"> • Geometria Euclidiana ou Plana • Ponto • Reta • Plano • Livro Didático • Transposição Didática • Teoria Antropológica do Didático • Assuntos correlatos 	<ul style="list-style-type: none"> • Web: sites acadêmicos relacionados ao tema. • Bibliotecas de Universidades e Faculdades. • Acervo online das bibliotecas • Acervo pessoal do autor • Materiais de colegas professores.

Tabela 2. Relação dos livros didáticos de Matemática analisados na pesquisa.

Nº	Nome do livro	Nome(s) do(s) autore(s)	PNLD correspondente
1	MATEMÁTICA IDEIAS E DESAFIOS (5ª série), 1999.	Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga	PNLD 1999 (1999 – 2000 – 2001)
2	APRENDENDO MATEMÁTICA (5ª série), 2002.	José Ruy Giovanni e Eduardo Parente	PNLD 2002 (2002 – 2003 – 2004)
3	TUDO É MATEMÁTICA (5ª série), 2005.	Luiz Roberto Dante	PNLD 2005 (2005 – 2006 – 2007)
4	MATEMÁTICA: Imenes e Lellis 6º ano, 2009.	Luis Márcio Imenes e Marcelo Lellis	PNLD 2008 (2008 – 2009 – 2010)
5	MATEMÁTICA IDEIAS E DESAFIOS (6º ano), 2012.	Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga	PNLD 2011 (2011 – 2012 – 2013)

² Instituto Nacional do Livro Didático para o Ensino Fundamental do Instituto Nacional do Livro - Plidef/INL -, que funcionou por meio de um sistema de coedição entre os setores público e privado entre os anos de 1971 e 1976 (VAHL & PERES, 2017, vol.47, n.164, pp.562-585).

6	Projeto Teláris: Matemática, 6º ano, 2014.	Luiz Roberto Dante	PNLD 2014 (2014 – 2015 – 2016)
7	Vontade de saber Matemática, 2017.	Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro	PNLD 2017 (2017 – 2018 – 2019)

DO MATERIAL EMPÍRICO DA PESQUISA

O Livro Didático (LD)

A imprensa foi inventada por Johann Gutemberg, no ano de 1445, sendo esse feito um dos maiores avanços para a criação e evolução do livro didático. A grande contribuição de Gutenberg, com a criação da imprensa foi a de fornecer condições para a confecção de um volume maior de textos, nesse sentido, tem-se:

A inovação crucial de Gutenberg não foi propriamente a imprensa, uma vez que técnicas de impressão como a em madeira ou em cobre já existiam para folhetos; a mudança essencial foi a introdução dos tipos móveis de um número muito elevado de livros volumosos, estendendo e acelerando assim a reprodução de textos. (SCHUBRING, 2003)

A possibilidade de poder se confeccionar um enorme número de textos, influenciou diretamente a maneira da comunicação, possibilitando que informações restritas a determinados grupos de pessoas pudessem ser compartilhadas por diversos indivíduos, que com certeza não teriam acesso a essas informações, sem a invenção de Gutenberg, os livros didáticos foram contemplados com essa nova fase da comunicação com a criação da imprensa.

Lembro que na Idade Média as obras manuscritas eram restritas. Com o advento da imprensa, esse número tornou-se, para a época enorme. Cerca de nove milhões de exemplares de várias obras foram impressas até o ano de 1500, tornando possível um acesso a obras antes limitadas a poucos leitores (D'AMBROSIO).

A partir dessa invenção o ensino deixa de ser visto como algo simplesmente oral, isto é, baseado simplesmente na transmissão por meio da fala e dos gestos, passa então a incorporar registros visuais. Fato que possibilitou avanços no ensino educacional, uma vez que o indivíduo não somente assimilava situações por meio da oralidade, pois, doravante, tinha a possibilidade de ver aquilo que era dito de maneira oral (SILVA, 2010). Isso se torna perceptível com a existência da ligação da Matemática com o comércio e os negócios, que remonta de muito tempo e na Alemanha surgem os primeiros livros-texto, segundo Schubring (2003, p.17): “Os primeiros livros-texto impressos alemães eram destinados aos propósitos do comércio e dos negócios. Esse fato se alinha com a estrutura para a matemática na civilização islâmica.” O mesmo auto também se refere ao saber matemático:

O saber matemático é transmitido por dois caminhos privilegiados: pela comunicação pessoal ou oral e por textos escritos. Embora a matemática já exista desde pelo menos cinco mil anos, a forma que conhecemos do texto escrito – o livro impresso – só existe desde pouco mais de quinhentos anos. (SCHUBRING, 2003)

Concordando com o que escreveu o autor e contribuindo com suas ideias, lembramos dos meios digitais disponíveis, hoje em dia, possibilitando a ampliação do universo de informações. Os estudantes e a sociedade, de uma maneira geral, tem acesso ao mundo digital, o mesmo faz parte do cotidiano e interliga o mundo das informações por meio da Internet. Os livros evoluíram e além do livro físico temos os digitais, que já se fazem presente na vida dos estudantes.

O surgimento do livro didático está intrinsecamente relacionado às mudanças profundas ocorridas nos últimos tempos, no âmbito social, político e cultural. Com a modernização da sociedade e a criação dos sistemas públicos de ensino e a expansão da oferta da educação, houve a necessidade da criação de um sistema organizado de informações para que os professores pudessem ter um êxito maior em suas práticas pedagógicas. Pode-se dizer que os livros didáticos, obras literárias e livros em braile, chegaram às escolas brasileiras a partir do ano de 1929, quando foi criado o Instituto Nacional do Livro (INL), que era um órgão específico para legislar sobre a política do livro didático. O objetivo do INL era de dar legitimação ao livro didático nacional e também contribuir com o incremento de sua produção. Porém, só em 1934 no governo do presidente Getúlio Vargas foram dadas as primeiras atribuições ao INL, ou seja, após cinco anos o INL

começa a editar obras literárias, elaborar uma enciclopédia e um dicionário, a nível nacional e também começa a expandir o número de bibliotecas públicas.

Sendo um dos recursos quase sempre presente no ensino da Matemática, o livro didático, funciona como uma forte referência para a validação do saber escolar. De acordo com Silva (1998), o livro didático, passa a ser utilizado com mais frequência no Brasil na segunda metade da década de 60, com a assinatura do acordo MEC-USAID em 1966, época em que são editados em grande quantidade para atender a demanda de um novo contexto escolar em surgimento. Devido à importância do Livro Didático no contexto da educação no Brasil, foi instituído o dia 27 de fevereiro com o dia Nacional do Livro Didático.

O Guia do livro didático faz parte do Programa Nacional do Livro Didático, o qual procura, dentre outras coisas, fazer um estudo detalhado dos livros didáticos produzidos no Brasil. O guia passa por um detalhado processo de avaliação e vale ressaltar que o guia traz as resenhas dos livros didáticos, sendo o componente principal do livro, conforme o Guia do Livro Didático, 2017:

O presente Guia tem o objetivo de apoiar as reflexões e trocas de ideias nessa atividade tão importante. Os textos que o compõem são fruto de um minucioso processo de avaliação que envolveu professores universitários e do ensino básico de diversas instituições educacionais e regiões do país. No Guia, você encontra as Resenhas das coleções de livros de 6º ao 9º ano, aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático 2017. Elas são o componente principal do Guia e são apresentadas segundo a ordem de inscrições das obras no PNLD (GUIA DO LIVRO DIDÁTICO, 2017).

A matemática é um dos componentes, que por ser universal, adquire uma grande importância no contexto educacional. Há a necessidade dos professores se apropriarem das orientações do guia do livro, compartilharem ideias entre os seus pares para que os livros didáticos de matemática possam garantir uma resposta adequada ao processo de ensino e aprendizagem, dessa área do conhecimento que além de sua importância apresenta uma série de obstáculos tanto no ensino como na aprendizagem.

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)

O PNLD tem como objetivo a distribuição de obras didáticas aos estudantes da educação básica da rede pública de ensino brasileira. Nesse sentido percebe-se que esse programa já está consolidado, no âmbito da educação do Brasil, assumindo importância relevante no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Yves Chevallard (1991), em sua teoria da Transposição Didática, nos remete a um ambiente externo, que ele denominou de Noosfera, esse ambiente consiste em pessoas, entidades, etc., que estão envolvidas na transformação do saber antes de ele chegar à sala de aula. Nesse sentido pode-se situar que, no Brasil, essa Noosfera também é composta pelo Ministério da Educação (MEC) e pelos autores de livros didáticos.

Como mencionado anteriormente e de acordo como informações contidas no portal do FNDE, foi no ano de 1929 a criação do Instituto Nacional do Livro (INL), como um órgão específico para legislar sobre as políticas do livro didático, esse instituto contribui para a legitimação do livro didático e aumenta a sua produção. Porém é interessante observar que só no ano de 1938 tem-se a instituição da Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD), por meio do Decreto – Lei nº 1.006, de 30/12/1938, com essa comissão fica estabelecida a primeira política de legislação e controle de produção e circulação do livro didático no País. Para consolidar a legislação é lançado, em 1945, é lançado o Decreto-Lei nº 8.460, de 26/12/45, “é consolidada a legislação sobre as condições de produção, importação e utilização do livro didático, restringindo ao professor a escolha do livro a ser utilizado pelos alunos, conforme definido no art. 5º”.

Depois de passar por várias mudanças, o ano de 1985 tem um significado relevante em todo o processo histórico do livro didático e também nesse estudo, pois em 1985 surge o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), por meio do Decreto nº 91.542, de 19 de agosto de 1985, substituindo o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (Plidief) e permanecendo até os dias atuais, trazendo diversas mudanças, tais como: indicação do livro didático pelos professores; reutilização do livro, implicando a abolição do livro descartável e o aperfeiçoamento das especificações técnicas para sua produção; fim da participação financeira dos estados, passando o controle do processo decisório para a FAE e garantindo o critério de escolha do livro pelos professores.

O funcionamento do PNLD, também, leva em consideração, o período de três anos de utilização dos livros didáticos, sendo assim utilizado por mais de um aluno, alternância anual das compras integrais e nos intervalos as compras para reposição dos livros didáticos que foram extraviados, danificados etc., o remanejamento de livros entre as escolas.

Neste ano de 2018 foi realizada mais uma escolha de livros didáticos, por meio do PNLD 2019 para o Ensino Fundamental 1, isto é, do 1º ao 5º ano. Após o processo de escolha dos livros didáticos o responsável pela escolha nas escolas públicas, urbanas e rurais deverá acessar o site do Programa Dinheiro Direto na Escola (PDDE) para oficializar a escolha. O PNLD 2019 apresenta novidades, as mesmas são: o material digital do professor vem acompanhando os livros didáticos, cada coleção vem acompanhada de plano de desenvolvimento, sequências didáticas e uma proposta de acompanhamento da aprendizagem.

Uma novidade lançada pelo FNDE, em 2018, foi o PNLD literário. A escola pode acessar o sistema do MEC e escolher livros literários para a educação infantil (creche e pré-escola), nos anos iniciais do ensino fundamental (1º ao 5º ano) e no ensino médio. O prazo foi muito curto, com previsão de ir até o dia cinco de outubro de 2018. Sendo um momento em que as escolas devem escolher com cuidado as obras que melhor se enquadrem para as necessidades de formação de seus alunos.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A Teoria da Transposição Didática (TD)

Segundo Pais (2015, p. 12), temos que: “A transposição didática permite interpretar as diferenças que ocorrem entre a origem de um conceito da matemática, como ele encontra-se proposto nos livros didáticos, a intenção de ensino do professor e, finalmente, os resultados obtidos em sala de aula”. A teoria da Transposição Didática, que foi proposta pelo francês Yves Chevallard (1991), tem como questão principal a noção de antropologia didática. Essa noção se ancora nos conceitos primitivos de instituições, de indivíduos e objetos, como também nas noções de relações pessoais e institucionais com os objetos de estudo.

O objeto O existe para o indivíduo X se X tem uma relação pessoal com ele, designada de $R(X, O)$: relação de X com O . Igualmente, o objeto O existe para a instituição I – é um objeto institucional para I – se I tem uma relação institucional com O , $R_I(O)$. Notemos que esse objeto existe – é um objeto – se é um objeto ao menos para um indivíduo X ou uma instituição I . Dado isto, dizemos que X conhece O se X tem uma relação com O (o que significa dizer que O existe para X). Diremos que, para o sujeito Z de uma instituição I , X conhece O e Z supõe um juízo de conformidade de $R(X, O)$ com $R_I(O)$. (CHEVALLARD, 1991)

O sistema didático é formado por três elementos, segundo Menezes (2006, p. 30), se configuram como partes constitutivas de uma relação dinâmica e complexa. Esses elementos são *o professor, o aluno e o saber*. Ainda, segundo Menezes (2006, p. 30), dois elementos são humanos (como bem destaca Schubauer-Leoni, 1988b) nesta relação, ou seja, *o professor e o aluno*; e um elemento que não é não-humano, no sentido de que não é de carne e osso (embora o consideremos uma produção humana) mas que determina, em larga escala, a forma como tais relações irão se estabelecer: *o saber*.

Essa relação de três elementos ficou conhecida como o Triângulo das Situações Didáticas, como se referiu Guy Brousseau. O francês Yves Chevallard, com suas teorias da Transposição Didática e Antropológica do Didático, acrescenta mais um elemento nessa tríade, ampliando a estrutura conceitual já existente na Didática da Matemática de influência francesa, isto é, *as instituições*. Segundo Araújo (2009, p. 26), essas teorias acrescentam mais um conceito ao sistema didático que, originalmente, apoia-se em três elementos fundamentais: *o professor, o aluno e o saber*.

O sistema didático concebido por esse pesquisador (Chevallard) é composto pelos sujeitos da instituição estudada, que ao menos inclui o professor e o aluno, e pelo objeto de estudo. Nesta abordagem, a aprendizagem é fruto das mudanças ocorridas na relação pessoal de uma determinada pessoa com o objeto (ARAÚJO, 2009).

Segundo Pais (2015, p.17), a transposição didática pode ser entendida como um caso especial da transposição dos saberes, sendo esta entendida no sentido da evolução das ideias, no plano histórico da evolução intelectual da humanidade. Então, em breves palavras, essa teoria vai refletir sobre os caminhos percorridos pelo saber até sua chegada em sala de aula, ou seja, na questão do saber gerado na comunidade científica e das transformações que esse saber sofreu até a sua entrada na sala de aula.

De acordo com Khun (1975), os paradigmas são princípios e regras que os membros de uma comunidade científica compartilham entre si, visando a validade dos saberes produzidos nesse

contexto. Para que uma produção seja reconhecida como científica é preciso que os membros da respectiva comunidade respeitem o conjunto dessas regras (PAIS, 2018).

Esses elementos de ligação entre o conhecimento científico e o conhecimento que o aluno é capaz de aprender e produzir é denominado Transposição Didática. Então, a seguir, temos a conceituação dada pelo próprio autor.

“Conceitua que a Transposição Didática é como o trabalho de fabricar um objeto de ensino, ou seja, fazer um objeto de saber produzido pelo sábio. É um instrumento através do qual analisamos o movimento do saber sábio para o saber a ensinar que e através destes, chega-se ao saber ensinado.” (CHEVALLARD 1991)

A didática da matemática lança um olhar no jogo realizado entre professor, aluno e o saber matemático, que foi chamado de *sistema didático*. Em sua teoria da transposição didática Chevallard (1991) lança esse olhar para o polo do “saber”, ou seja, como o saber construído na comunidade científica será ensinado (saber ensinado) e que transformações ocorre durante o percurso realizado entre um saber e outro.

Para que o ensino de um determinado objeto do saber seja possível, esse elemento deverá ter sofrido certas deformações, que o tornariam apto para ser ensinado. O saber tal como é ensinado, o saber ensinado, é necessariamente distinto do inicialmente designado como saber que deve ser ensinado, o saber a ensinar. (CHEVALLARD, 1991, p. 16-17)

Nesse sentido, percebe-se que a ideia de transposição didática se baseia na construção da problemática ecológica, levando em consideração as exigências que surgem das inter-relações entre a noções de saberes e instituições. A questão do saber para Chevallard não surge simplesmente do nada, pelo contrário, o saber surge em um determinado momento e em uma determinada sociedade. Isto nos remete a questão de que vários saberes podem surgir em vários momentos e em várias sociedades ao mesmo tempo, como demonstra a própria história da Matemática.

Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torna-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado transposição Didática (CHEVALLARD, 1991, apud PAIS, 2001).

Na concepção de Chevallard (1991) existe distinção entre os saberes e ele assim os classifica:

- a) Saber científico – é o saber que é produzido pelos cientistas (academias), pode-se pensar no lugar onde nasce o saber.
- b) Saber a ensinar – é o saber que é pensando e selecionado pela noosfera, isto é, pelos autores, educadores, etc. No caso do Brasil, pode-se pensar esse ambiente, chamado por Chevallard de Noosfera, como o Ministério da Educação – MEC, as Secretarias de Educação, os autores de livros didáticos, etc., ressaltando que um dos meios mais importantes do saber a ensinar encontra-se nos livros didáticos.
- c) Saber ensinado – é o saber resultante do trabalho realizado, pelo professor, em sala de aula. É o saber que efetivamente chega aos alunos por meio do professor no ambiente escolar.

O uso da expressão transposição didática se justifica quando a instituição alvo é uma instituição de ensino. Nesse sentido Chevallard (1991) distingue três tipos de saberes: saber científico, que é produzido pelo cientista (academias); saber a ensinar, que é pensado e selecionado pela noosfera (educadores autores, etc.); e saber ensinado, que resulta do trabalho realizado em sala de aula pelo professor (ARAÚJO, 2009).

Em sua teoria da Transposição Didática, Yves Chevallard (1991), nos remete a um ambiente externo, que ele denominou de Noosfera. Esse ambiente consiste em pessoas, entidades, etc., que estão envolvidas na transformação do saber antes de ele chegar à sala de aula. Nesse sentido pode-se situar que, no Brasil, essa Noosfera também é composta pelo MEC e pelos autores de Livros Didáticos.

De acordo com Pais (2015, p. 20), um exemplo de transposição didática dada pelo próprio Chevallard (1991), é o conceito de distância. “Desde a época em que podemos falar da influência de Euclides na geometria, a noção de distância entre dois pontos foi estudada de uma forma quase espontânea. Entretanto, em 1906, essa noção foi generalizada pelo matemático Frécht (1878 – 1973) com o objetivo de trabalhar com os chamados espaços de funções.”

Ainda, segundo Pais (2015, p. 20), esse exemplo trata-se de uma transposição didática *stricto sensu*, enquanto que o Movimento da Matemática Moderna (MMM) é um exemplo da transposição didática *lato sensu*. De acordo com o mesmo autor, tem-se: *transposição didática stricto sensu* é quando a evolução das ideias é analisada em relação a um determinado conceito, enquanto que a *transposição didática lato sensu* é quando a análise é desenvolvida no contexto mais amplo, não se atendo a uma noção particular.

Segundo Almouloud (1996, p. 50), Yves Chevallard estuda a transposição didática segundo o seguinte esquema:

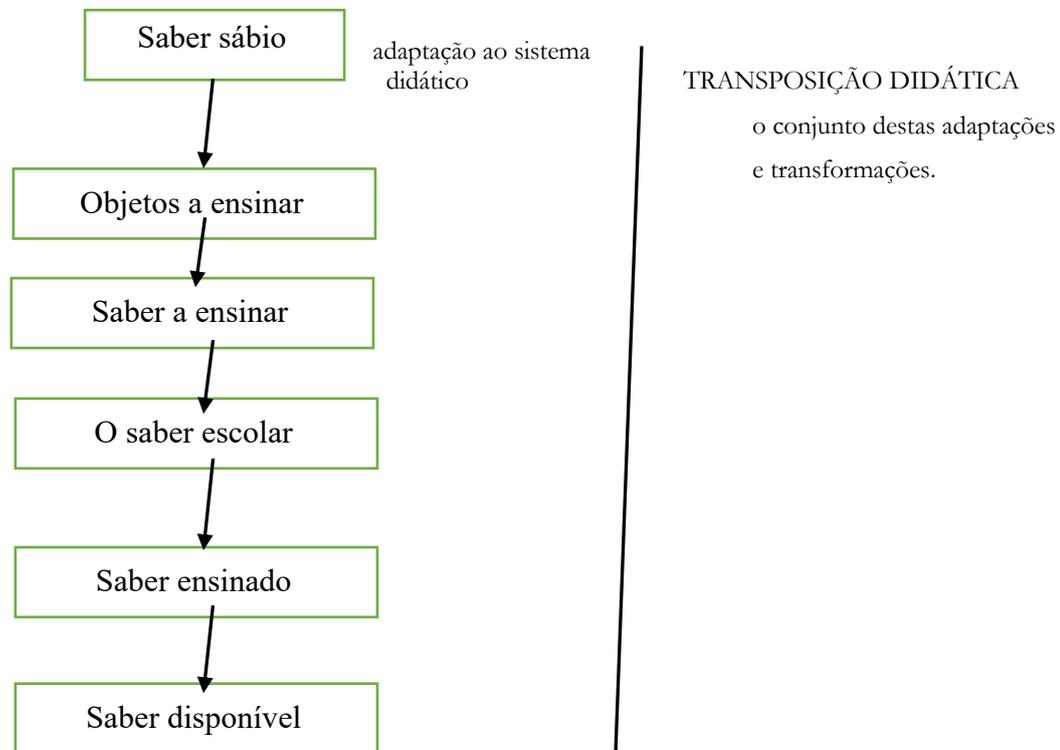


Figura 1. Esquema da Transposição Didática.

Dos Conceitos de Ponto, Reta e Plano na Comunidade Científica

Segundo Rezende & Bontrim (2008, p. 18), a origem da palavra geometria provém da palavra grega *geometrein*: *geo*, que significa terra e *metrein*, que significa medir; assim, geometria foi originalmente a ciência de medir terras. A Geometria nasceu das necessidades dos egípcios de delimitarem terras nas margens do rio Nilo, provavelmente por meio de observações e experimentos. Com os gregos houve a assimilação desses conhecimentos referindo-se à Geometria como “medida da terra”, segundo Gonçalves (2000, p.7): “a mais antiga referência a essa palavra data do século V a.C. e foi feita pelo filósofo e escritor grego Heródoto, ao descobrir a história e os costumes dos egípcios. Através de um relato, podemos compreender o porquê do significado original desse termo”. São os gregos que não se contentam com os conhecimentos empíricos e avançam os princípios geométricos por meio de demonstrações dedutivas rigorosas.

Fazer afirmações sobre as origens da Geometria é bastante arriscado porque não temos registros de épocas anteriores a 6.000 anos antes de Cristo. O historiador grego Heródoto (século V a. c.) atribuiu aos egípcios a origem da Geometria, pois acreditava que ela surgiu da necessidade de fazer novas medidas de terras depois de cada inundação provocada pelo rio Nilo. Quando o rio Nilo transbordava, as demarcações de algumas propriedades desapareciam. Então, assim que o rio voltava ao seu leito normal, era preciso demarcar novamente os limites dessas terras. Esse trabalho era feito pelos “estiradores de cordas” (agrimensores), que utilizavam os registros feitos antes das inundações e seus conhecimentos de Geometria (BIANCHINI, 2006).

Pelos relatos antigos, a Geometria, tem ligação com a medição de terras, surgindo incorporada as necessidades das pessoas em seu cotidiano de prover alimentos, nesse sentido tem-se o relato do grego Heródoto.

Segundo Heródoto, um rei dividira o território do Egito entre todo o povo, dando a cada egípcio um lote de terra quadrado e de mesmo tamanho. Essa divisão veio acompanhada da imposição de pagamento de um tributo anual. Entretanto, qualquer homem que o rio Nilo despojasse de uma parte de sua terra poderia dirigir-se ao rei e expor-lhe o fato. O rei mandava então que seus funcionários medissem a extensão do decréscimo do lote, para que fosse concedida a seu detentor uma redução no tributo bruto proporcional à perda. (GONÇALVES, 2000)

Nesse sentido temos a Geometria como uma construção humana, principalmente pelas suas necessidades cotidianas de medir e dividir terras, a Geometria desenvolveu-se ao longo do tempo e diversificou-se em vários ramos, a Euclidiana como o próprio nome diz refere-se ao ramo que se originou da obra de Euclides, Os Elementos.

Originalmente, a palavra geometria significa medida de terra. Os antigos egípcios a usaram para medir suas terras às margens do Nilo. Os gregos a trataram com bases científicas. Euclides 300 a.C. reuniu os conhecimentos de geometria da época no seu famoso livro ELEMENTOS (FREITAS & BOTELHO, 1974).

Mostrando-se como uma área muito fecunda surgem diversas ramificações da Geometria, percebendo essa ciência como: “Geometria é a parte da Matemática que estuda o espaço e as figuras que nele podem se encerrar”, segundo BADEM (2009, p. 181) e segundo Gonçalves (2000, p. 21): “Geometria é o ramo da Matemática que estuda as figuras geométricas e suas propriedades”. Dentre as diversas ramificações da Geometria pode-se citar: Geometria Plana ou Euclidiana, Geometria Analítica, Geometria Cinemática, Geometria Projetiva, Geometria Descritiva, Geometria Elíptica (Riemann), Geometria do Espaço, Geometria Hiperbólica (Lobatchevsk), Geometria Diferencial, etc.

Foi a partir da negação do quinto postulado de Euclides, conhecido atualmente como Axioma das Paralelas, cuja denominação é devida ao matemático escocês Jonh Playfair (1748 – 1819), que surgiram as geometrias não – euclidianas, segundo Andrade (2008, pág. 7), “a busca pela contestação do modelo absoluto para o espaço passou a ser uma obsessão e não tardou a surgir candidatos ao Panteão”.

Das diversas ramificações da geometria, temos as chamadas geometrias não-euclidianas, cujos descobridores foram chamados de quatro gênios da matemática, são eles: Nikolai Lobachevsky (1792–1856), Janos Bolyai (1802–1860), Carl Friedrich Gauss (1777–1855) e Bernhard Riemann (1826-1866). Como exemplos dessas geometrias temos: Geometria Hiperbólica ou de Lobatchevsk, foi apresentada por esse sábio russo, em 1826, a Geometria de Compasso ou de Mascheroni, que se baseia em postulados que não são os de Euclides, entre outras geometrias. Fizemos aqui, apenas, uma breve alusão relativa ao surgimento das geometrias não-euclidianas, uma vez que o foco desse estudo está no campo da Geometria Euclidiana ou Geometria Plana.

...Lobachewsky é olhado como o “Copérnico da geometria”, o homem que revolucionou o assunto pela criação de todo um ramo novo, a geometria de Lobachewsky, mostrando que a geometria euclidiana não era a ciência exata ou verdade absoluta que antes se supunha (BOYER 1996).

O surgimento da Geometria Euclidiana ou Geometria Plana remonta aos trabalhos de Euclides de Alexandria, segundo Levi (2008, p.7): “o famoso matemático Euclides viveu por volta do ano 300 a.C. Entre outras coisas, conjecturou e demonstrou que existem infinitos números primos (indivisíveis)”. Também encontramos na literatura, que Euclides nasceu na Síria no ano de 325 a.C., grego, foi professor, escritor e célebre matemático. Foi educado em Atenas e frequentou a academia de Platão. A obra de Euclides é bastante relevante e conseguiu se perpetuar através do tempo e se tornar a base para a Geometria Plana.

Euclides era mais jovem que Platão (428 A.C.), mais velho que Arquimedes (278 A.C.) e ensinou em Alexandria. Quando Alexandre, o Grande, morreu em 323 A.C., seu império africano foi herdado por Ptolomeu, seu general macedônio favorito, que governou como rei de 305 a 285 A.C. Supõe-se que Ptolomeu trouxe Euclides de Atenas para Alexandria, para integrar o corpo do grande centro de aprendizado helenístico – conhecido como Museum, com sua famosa biblioteca – que lá ele fundou (SIMMONS, 1987, p. 38).

Segundo Levi (2008, p. 159), Euclides introduziu explicitamente o formato (também chamado método) axiomático, que consiste em começar listando os conceitos básicos e os postulados – ou seja, ideias não deriváveis de outras ideias no mesmo sistema – e derivar (definir ou deduzir) os demais a partir deles. A obra de Euclides, *Os Elementos*, composta de treze livros ou volumes foi escrita em **Alexandria**, por volta de **300 a.C.** Essa obra engloba uma coleção de definições, **postulados (axiomas)**, proposições (**teoremas e construções**) e **provas matemáticas** das proposições. Os treze livros cobrem o que hoje conhecemos por **Geometria Euclidiana** e a versão grega antiga da **teoria dos números** elementares.

Há cerca de 2.300 anos, em Alexandria, numa cidade grega perto da embocadura do Nilo, no Egito, um professor chamado Euclides escreveu o sistema axiomático mais famoso do mundo. Seu sistema foi estudado por acadêmicos gregos e romanos por mil anos, depois foi traduzido para o árabe em cerca de 800 d.C. e estudado pelos seus acadêmicos. Tornou-se o padrão para o pensamento lógico por toda a Europa medieval (BERLINGHOF & GOUVEIA, 2010, p. 159).

O trabalho de Euclides, *Os Elementos* reuniu três grandes descobertas do seu tempo: a teoria das proporções de Eudoxo - **Livro V**, a teoria dos irracionais de **Teeteto** e a teoria dos cinco sólidos regulares, que ocupava um lugar importante na **cosmologia** de **Platão**, sendo considerado um dos seus maiores feitos. Esse trabalho foi bastante impresso, com mais de duas mil edições diferentes, desde a primeira edição, acredita-se que é o livro com o maior número de impressões, ficando atrás apenas da Bíblia Sagrada, sendo considerado como sua obra-prima. Segundo Eves (2004, p. 167-168), Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico. Mais de mil edições impressas dos *Elementos* já apareceram desde a primeira delas em 1482; por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria.

Tendo sua primeira edição, *OS Elementos*, datada de 1482, fica evidente devido ao lapso temporal, que não é o texto do próprio Euclides que foi impresso, sendo uma obra escrita há mais de dois mil anos, não houve a preocupação, por parte do autor, em situá-la no contexto histórico, como também não fazer menção a ninguém.

Os Elementos propôs-se iniciar pelo começo da Geometria, nada requerendo do leitor de experiência ou conhecimento anteriores. Não obstante ele não oferece nenhuma explicação preliminar e em nenhum lugar fornece observações iluminadoras de qualquer sorte. Não faz tentativa de situar seu conteúdo em algum contexto histórico ou matemático e em nenhuma parte o nome de alguém é mencionado. Sua impessoalidade pétrea tonteia a mente (SIMMONS, 1987).

Segundo Boyer (1996, p. 69): “Euclides e *Os Elementos* são frequentemente considerados sinônimos; na realidade o homem escreveu cerca de uma dúzia de tratados, cobrindo tópicos variados, desde a óptica, astronomia, música e mecânica e até um livro sobre seções cônicas.” Naquela época era comum os trabalhos serem chamados de *Os Elementos*, entretanto, a obra de Euclides conseguiu se sobrepôr as anteriores e segundo Eves (2004, p. 167): “Parece que esse trabalho notável imediata e completamente superou todos os *Elementos* precedentes; de fato, nenhum vestígio restou de esforços anteriores.” De acordo com Bicudo (2009, p. 21): Tendo essa obra sido escrita por volta do final do século IV a.C., é difícil que se possa imaginar ter chegado até nós o manuscrito do seu autor, o chamado manuscrito autógrafo. De fato, não possuímos tais manuscritos dos autores clássicos – gregos e latinos.

O trabalho de Euclides trouxe enormes contribuições para o meio científico, pois a partir de suas ideias surgiram outras e que mesmo concordando ou não concordando essas ideias deram suporte para o grande êxito da obra de Euclides. Segundo Roque (2012, p. 163-164), a obra de Euclides, *Os Elementos*, é composta dos seguintes livros:

- Livro I: primeiros princípios e geometria plana de figuras retilíneas: construção e propriedades de triângulos, paralelismo, equivalência de áreas e teorema “de Pitágoras”.
- Livro II: contém a chamada “álgebra geométrica”, trata de igualdades de áreas de retângulos e quadrados.
- Livros III e IV: propriedades de círculos e adição de figuras, como inscrever e circunscrever polígonos em círculos.
- Livro V: teoria das proporções de Eudoxo, razões entre grandezas de mesma natureza.
- Livro VI: aplicações do livro V à geometria, semelhança de figuras planas, aplicação de áreas.

- Livros VII a IX: estudo dos números inteiros – proporções numéricas, números primos e progressões geométricas. Livro X: propriedades e classificação das linhas incomensuráveis.
- Livro XI a XIII: geometria sólida em três dimensões, cálculo de volumes e apresentação dos cinco poliedros regulares.

Observando a composição da obra de Euclides, nota-se que ela não se restringiu apenas a área da Geometria, apresenta também contribuições em outras áreas da matemática. As ideias de ponto, reta e plano são apresentadas em seu primeiro livro, entre outras coisas, os primeiros princípios e geometria plana. Segundo Roque (2012, p. 163-164): Livro I: primeiros princípios e geometria plana de figuras retilíneas: construção e propriedades de triângulos, paralelismo, equivalência de áreas e teorema “de Pitágoras”. Os Elementos inicia com a apresentação de vinte e três definições de ponto, linha, reta, círculo, etc., sem quaisquer comentários, a partir da nona definição o autor nos remete a algumas figuras. Em seguida são apresentados três postulados que são proposições geométricas específicas, doze axiomas e quarenta e oito proposições, com seus respectivos problemas e teoremas. Em suas sete primeiras definições encontram-se o ponto, a reta e o plano, segundo Commandino (1944, p. 4), temos:

- Ponto é o que não tem partes, ou o que não tem grandeza alguma.
- II. Linha é o que tem comprimento sem largura.
- III. As extremidades das linhas são ponto.
- IV. Linha reta é aquela, que está posta igualmente entre as suas extremidades.
- V. Superfície é o que tem comprimento e largura.
- VI. As extremidades da superfície são linhas.
- VII. Superfície plana é aquela, sobre a qual assenta toda uma linha reta entre dois pontos quaisquer, que estiverem na mesma superfície.

No livro escrito pelo professor Irineu Bicudo ele apresenta no livro I (Os Elementos) as vinte e três definições, os cinco postulados e as nove noções comuns, segundo Bicudo (2009, p. 97), as sete primeiras definições são:

- Ponto é aquilo de nada é parte.
- E linha é comprimento sem largura.
- E extremidades de uma linha são pontos.
- E a linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
- E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
- E extremidades de uma superfície são reta.
- Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.

Essa apresentação das sete primeiras definições fornecidas por Bicudo (2009), serão utilizadas, posteriormente, como embasamento na análise dos dados desse trabalho.

Dos Conceitos de Ponto, Reta e Plano na Sala de Aula

O nascedouro da Geometria Euclidiana ou Plana vem de Euclides, matemático da biblioteca de Alexandria, cerca de 300 a. C. Euclides pretendeu reunir em sua obra, *Os Elementos*, todos os conhecimentos de geometria conhecidos em sua época. Em sua Geometria, Euclides, pretende descrever numa formulação racional a geometria intuitiva do espaço. Parte de definições ou locuções básicas, tais como: ponto - “o que não tem partes”, linha - “comprimento sem espessura”, reta - “linha que descansa por igual em todos os seus pontos”, etc. Segundo Bicudo (2009, p. 63), na Antiguidade e na Idade Média, o modo de abordagem de uma obra e do seu ensino era o *Comentário*. De fato, um comentário ou exposição do pensamento de algum autor era um dos métodos básicos de ensino nas escolas medievais.

Ainda, segundo Bicudo (2009, p. 63), no Ocidente, o comentário tomou várias formas. Ele cita, por exemplo, a maneira especial empregada por Boécio nas suas exposições das *Categorias e do De interpretatione* de Aristóteles, onde ele faz os comentários por partes do texto, ou seja, ele destrincha o texto e faz os comentários sobre cada parte da forma mais simples possível. Boécio se aproxima bastante, como comentarista, de Proclus no seu *Comentário ao livro I dos elementos*, segundo Bicudo (2009, p. 63): Depois de

um longo Prólogo em duas partes, trata pormenorizada e separadamente das “Definições”, dos “Postulados”, dos “Axiomas” (“Noções Comuns”, como está nos *Elementos*) e das “Proposições”, uma a uma.

Proclus é conhecido como um dos grandes comentaristas da obra de Euclides, Os Elementos, segundo Bicudo (2009), antes dele houve outros comentaristas, como por exemplo: Herão de Alexandria, Porfírio, Pappus, Simplicio. Entre os vários comentaristas da obra de Euclides, temos Théon de Alexandria, segundo Bicudo (2009, p. 26): “qualquer edição dos Elementos feita anteriormente a 1814 era baseada numa família de manuscritos cujo arquetipo era o texto dado à luz de Théon.”

O texto dos Elementos comumente usados nas escolas é a edição de Théon, também chamado de Théon de Alexandria e pai de Hipátia, nascida aproximadamente no ano de 370 d.C., foi uma das maiores pensadoras de seu tempo, além de uma das primeiras mulheres a estudar e ensinar matemática, astronomia e filosofia. Théon trouxe a público uma edição, cerca de 700 anos depois de Euclides, com algumas alterações no texto. Segundo Cajori (2007, p. 23), os livros didáticos se baseiam nessa revisão feita por Théon, nesse sentido escreveu Cajori:

A revisão de Teon foi a base para praticamente todas as outras que a sucederam, os conteúdos de Geometria Euclidiana ou Plana contidos nos livros didáticos de Matemática se baseiam nessa revisão ocorrida há cerca de 700 anos. Mas, entre os manuscritos enviados do Vaticano a Paris por Napoleão I, foi encontrada uma cópia dos Elementos anterior a revisão de Teon (CAJORI, 2007, p. 46).

Analisando o que foi escrito por Cajori (2007), pode-se pensar na seguinte trajetória do ponto, da reta e do plano, eles surgem na comunidade científica com a obra de Euclides, Os Elementos, passa por diversas revisões, porém a revisão de Théon realizada 700 anos depois da obra de Euclides é quem vai servir de base para os textos escolares (livros didáticos). A seguir, temos uma ilustração dessa trajetória, criada pelo autor deste trabalho.

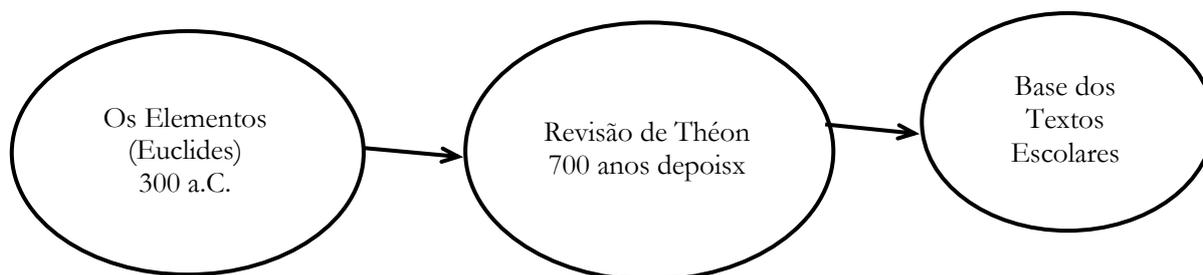


Figura 2. A trajetória do ponto, da reta e do plano.

Dentre tantos comentários, revisões e edições realizadas em Os Elementos ao longo do tempo, destacamos o renomado professor da universidade de Gottingen na Alemanha, David Hilbert (1862 – 1943), ele foi um dos maiores matemáticos da transição do século dezenove para o século vinte, segundo (RPM nº 40, 2000, p. 11): “Suas contribuições são contadas nas mais diversas áreas de pesquisa, como lógica matemática, equações diferenciais, teoria dos números e física matemática. Os chamados espaços de Hilbert, por exemplo, encontram aplicação na teoria quântica”.

Foi o grande David Hilbert, no final do século XIX, quem exaltou e advertiu para as virtudes da axiomática. Utilizou-a em matemática e em física, a tornou seu cânone (Hilbert, 1918). Entre as virtudes da axiomática, figuram as seguintes: economia, aceleração da dedução, facilitação do exame de coerência lógica, esclarecimento de suposições, individualização dos conceitos básicos ou primitivos (definidores), e busca de fundamentos cada vez mais profundos (LEVI, 2008, p. 8).

Em 1900, no congresso de Paris, David Hilbert propôs 23 problemas, Hilbert acreditava que esses problemas estariam ou deveriam estar presentes na atenção dos matemáticos do novo século. Muitos dos problemas propostos por Hilbert não foram resolvidos. Depois de fazer um estudo sistemático dos axiomas da geometria Euclidiana, pode-se dizer, que o trabalho de Hilbert em geometria, teve a maior influência nessa área desde Euclides. Hilbert propôs um conjunto de 23 axiomas e analisou o significado deles.

Embora a Matemática tenha se desenvolvido em muitos caminhos não previstos em 1900, grande parte desses 23 problemas de fato se relacionava com conceitos e teorias que vieram a ser trabalhados por notáveis matemáticos do século vinte. No campo da Geometria, Hilbert realizou estudos sobre axiomatização, que culminaram na publicação da obra *Fundamentos de Geometria*, em 1899, que exerceu forte influência sobre a Matemática do século vinte (RPM N° 42, 2000, p. 11).

O ser humano vive em sociedade e necessita saber lidar com as diversidades que esse tipo de convivência traz, principalmente de saber resolver problemas dos mais variados tipos que surgem no cotidiano, logo se faz necessário que o indivíduo desenvolva aptidões para dar conta dessas demandas diárias. A Geometria proporciona um olhar mais aprofundado do mundo que nos cerca, por meio da abstração e dos seus conceitos que se organizam de forma a contribuir na direção de um pensamento mais sistematizado e organizado. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) afirmam que por meio dos conceitos geométricos “(...) o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.” (BRASIL, 1998, p. 51).

Os conceitos dos entes primitivos o ponto, a reta, e o plano abordados nos livros didáticos de matemática do 6° ano do ensino fundamental tem sua origem na obra de Euclides, *Os Elementos*, entretanto essa obra foi bastante revisada e esses conceitos sofreram transformações que foram incorporadas nos livros com o intuito de facilitar a aprendizagem. Essa questão das mudanças ocorridas nesse saber geométrico nos remete ao que os autores escreveram:

A Geometria Euclidiana é estudada nas escolas desde o Ensino Fundamental. É simples para ser trabalhada, portanto adequada para ser utilizada desde a escola elementar. É baseada no texto do matemático grego Euclides, *Elementos*, escrito por volta do ano 300 a.C., texto este que teve o maior número de traduções, depois da Bíblia Sagrada (REZENDE & BONTORIM, 2008).

A Geometria Euclidiana ou Plana se baseia nos axiomas de Euclides, bem como no postulado que traz o seu nome. Foi Euclides de Alexandria, com a sua obra *Os Elementos*, quem mais se destacou no desenvolvimento desse ramo da Geometria. Por meio das atividades práticas o homem descobriu as propriedades geométricas e foi também por meio do estudo dessas propriedades que se percebeu que a partir de algumas podiam ser obtidas outras, por meio de dedução lógica, segundo Gonçalves Junior (2000, p. 10): “Assim, surgiu a ideia de selecionar algumas das propriedades conhecidas, a partir das quais se pudessem deduzir todas as demais.” Nesse sentido o mesmo autor Gonçalves Junior (2000, p. 10) escreveu: Axiomas ou propriedades primitivas ou postulados: são as propriedades selecionadas para servir de fundamentação à Geometria. Em grego, axioma, significa “dignos de confiança. “Teoremas: são as demais propriedades que podem ser deduzidas a partir dos postulados, o termo postulado é proveniente da palavra grega que significa “*penso, medito.*”

As definições ou locuções primitivas (básicas) da geometria plana nos remete a acreditar, ter confiança, pensar e meditar. Nesse sentido a imaginação ganha sua abrangência no indivíduo, uma vez que a própria noção de ponto nos leva a pensar no que não tem tamanho, nem largura, nem espessura. Pode-se ter apenas a ideia de que um ponto pode ser representado por uma estrela no firmamento. Não se deve confundir um objeto geométrico com sua representação gráfica. Por exemplo, uma estrela no céu não é um ponto, mas apenas o representa. O ponto, a reta e o plano são definições primitivas que devem ser aceitas sem contestação e a partir delas surgem os fundamentos da geometria plana ou euclidiana.

A Geometria é o ramo da Matemática que estuda as figuras geométricas e suas propriedades, para que possam ser estudadas as figuras geométricas necessitam estar convenientemente definidas, isto é, dizer o que uma coisa é. A Geometria Plana necessita de definir as figuras geométricas, isto é, de uma explicação precisa para determinado objeto. Quando se estabelece uma definição podem surgir duas importantes questões que podem tornar a definição inadequada, são elas: a ambiguidade e a circularidade. Em seguida, são apresentados exemplos dessas duas questões relativas a *inadequação da definição*:

Ambiguidade - Definição de quadrado: “Quadrado é uma figura geométrica com quatro lados iguais.”

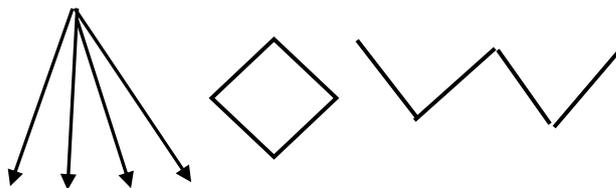


Figura 3. Demonstrando a ambiguidade

As figuras tem quatro lados iguais e portanto, se enquadram nessa definição de quadrado e suas exigências. Há no entanto, um problema: estas não são quadrados. A definição fornecida é ambígua: dá margem a múltiplas interpretações. Ela está, portanto, mal estabelecida.

Circularidade – 1ª Definição: “Reta é a união de todos os pontos colineares.”

2ª Definição: “Pontos colineares são pontos alinhados.”

3ª Definição: “Pontos alinhados são pontos da mesma reta.”

Nesse exemplo, os elementos que se quer definir acabam ficando, na verdade, sem definição. Não se diz, de fato, o que cada um é; afirma-se tão somente que o primeiro é o segundo, que o segundo é o terceiro e que este por sua vez é o primeiro. Há aqui um círculo vicioso. (GONÇALVES JUNIOR, p. 8, 2000)

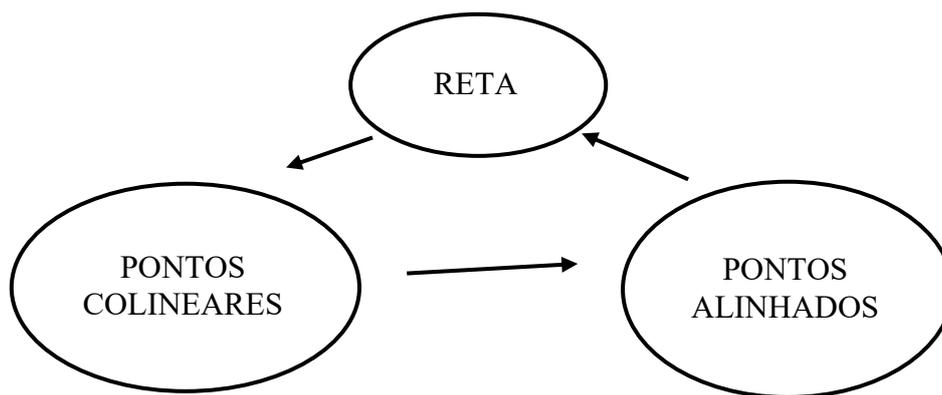


Figura 4. O círculo vicioso

Uma característica inerente das definições é a recorrência. De acordo com Gonçalves Junior (2000, p. 10): “Toda definição é recorrente, pois uma coisa só pode ser definida recorrendo-se a uma ou mais coisas anteriormente definidas.” Com essa percepção de que toda definição é recorrente, tem-se uma questão lógica a ser respondida no sentido de saber qual foi a primeira das definições? Para dar resposta a essa questão, é que certamente existe um conceito não-definido para dar suporte à definição inicial.

O ideal na geometria como em qualquer ciência seria definir todos os conceitos de que precisamos por meio de outros já conhecidos. É fácil perceber que se assim quisermos fazer na realidade não poderemos nem começar, pois aí faltariam os conceitos iniciais. Então o que fazemos é aceitar alguns conceitos iniciais, os mais simples e, a partir deles, apoiados desenvolvermos o nosso estudo (EDSON & ALBERTO, 1974).

Como mencionado anteriormente, as noções primitivas dão início a Geometria Plana, essas noções primitivas não são definidas. Segundo Gonçalves Junior (2000, p. 9) essas noções primitivas podem ser de dois tipos: os objetos não definidos e as relações não definidas. Exemplos de objetos não definidos é o ponto, a reta e o plano, enquanto a pertinência e a continência são exemplos de relações não definidas. Ainda de acordo com o autor “as relações existentes entre os objetos são estabelecidos pelas propriedades.” Exemplo de propriedade: “Numa reta há infinitos pontos que pertencem a ela.” Esta propriedade estabelece uma relação de pertinência entre o objeto ponto e o objeto reta.

Postulados primitivos da geometria, qualquer postulado ou axioma é aceito sem que seja necessária a prova, contanto que não exista a contraprova. Sabemos que a definição dos entes primitivos *ponto, reta e*

plano são quase impossível, porém o mais importante é sua representação geométrica e espacial. Em seguida, apresentamos como são, usualmente, representados esses objetos geométricos.

Ponto – é um conceito primitivo e como tal não se define.

Temos a ideia intuitiva do que é um ponto, mas não podemos defini-lo. Conhecemos imagens de um ponto quando, por exemplo, tocamos a ponta do giz no quadro, ou a ponta do lápis no papel, ou observamos uma estrela distante. São apenas imagens de um ponto, pois ele não tem dimensão, logo não pode ser medido; é apenas uma ideia podendo simplesmente ser concebido (FREITAS & BOTELHO, 1974).

Representação (notação) - designaremos os pontos pelas letras latinas maiúsculas: A, B, D, ...

Representação gráfica:



Figura 5

Observação: o conjunto de todos os pontos é o espaço.

Reta – também sendo um conceito primitivo não se define.

Imagens que podemos ter de uma reta é por exemplo, um raio de luz, um fio bem esticado, etc. A reta é apenas uma ideia e a concebemos como sendo ilimitada (FREITAS & BOTELHO, 1974).

Representação (notação) - Para as retas utilizam-se as letras latinas minúsculas: a, b, c, ...

Representação gráfica:



Figura 6

Plano – também é um conceito primitivo, logo não se define.

Imagens que podemos ter de um plano é por exemplo a superfície de um lago com águas paradas. O plano é uma ideia e o concebemos como ilimitado em todos os sentidos. (FREITAS & BOTELHO, 1974)

Representação (notação) - os planos são designados pelas letras minúsculas gregas: α , β , γ , ...

Representação gráfica:

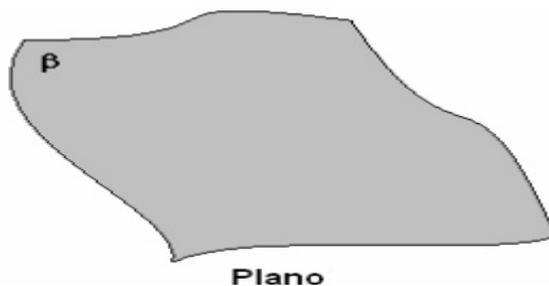


Figura 7

Essas representações apresentadas do ponto, da reta e do planos são as encontradas, geralmente, nos livros didáticos de Matemática, sabemos que a origem dessa geometria remonta ao trabalho de Euclides, porém Os Elementos foram revisados por inúmeros autores, consequentemente essas representações também são frutos dessas revisões.

A Geometria Euclidiana é estudada nas escolas desde o Ensino Fundamental. É simples para ser trabalhada, portanto adequada para ser utilizada desde a escola elementar. É baseada no texto do matemático grego Euclides, Elementos, escrito por volta do ano 300 a.C., texto este que teve o maior número de traduções, depois da Bíblia Sagrada. (REZENDE & BONTORIM, 2008)

Os entes primitivos, o ponto, a reta e o plano, segundo Rezende & Bontorim (2008, p. 12): “O plano é visto como o conjunto em que os pontos são seus elementos e as retas seus subconjuntos.” Essa abordagem é recorrente nos livros didáticos de matemática, com isso possivelmente se justifica a dificuldade em encontrar práticas pedagógicas diferentes, nas salas de aula de matemática do ensino fundamental, do que é abordado no livro texto adotado em sala de aula.

No que se refere exclusivamente as noções primitivas da Geometria o ponto, a reta e o plano, parece inexistirem práticas pedagógicas nas salas de aula de Matemática do ensino fundamental, que não estejam relacionadas com as abordagens contidas nos livros didáticos de matemática, isto é, são repassados em sala de aula os conceitos conforme eles se apresentam escritos nos livros didáticos de matemática. Isso pode ser em consequência de que os conceitos abordados quase não variam nos livros didáticos, seguindo sempre um mesmo raciocínio e enfoque.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Análise dos Conceitos de Ponto, Reta e Plano nos Livros Didáticos de Matemática do 6º Ano do Ensino Fundamental

Realizamos a análise dos conceitos básicos (ponto, reta e plano) presentes nos livros didáticos de Matemática do 6º ano que constam na tabela 2, página oito desse trabalho, relacionados com as sete primeiras definições, do livro I da tradução de Os Elemento de Euclides, segundo Bicudo (2009, p. 97): Ponto é aquilo de que nada é parte. E linha é comprimento sem largura. E extremidades de uma linha são pontos. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura. E extremidades de uma superfície são retas. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma. Essas definições foram tomadas como verdades iniciais.

O universo de livros analisados foi de oito livros, denominados de livro 1, livro 2 e assim sucessivamente até o livro 8. Entretanto, nesse estudo apresentaremos apenas os resultados de dois livros escolhidos aleatoriamente, ou seja, os livros de Iracema More e Dulce Satiko Onaga, do ano de 1999 e o livro de Luiz Roberto Dante, do ano de 2014, que correspondem, respectivamente, ao livro 1 e livro 6 da tabela. Na análise apresentamos, inicialmente, uma tabela contendo os conceitos de ponto, reta e plano nos livros didáticos de Matemática e as definições da tradução do professor Irineu Bicudo de Os Elementos de Euclides. Em seguida é realizada uma discussão sobre esses conceitos tomados na comunidade científica nos livros didáticos.

Como já foi mencionado, na teoria da Transposição Didática de Chevallard (1991), existe a distinção entre os saberes, ou seja, o saber científico que corresponde ao saber produzido pelos cientistas, o saber a ensinar que é o saber pensado e selecionado pela Noosfera (MEC, secretarias de educação, autores de livros didáticos, etc.) e o saber ensinado que corresponde ao resultado do trabalho do professor em sala de aula.

Esse último saber não interessa a esse estudo uma vez que não estamos analisando a prática docente do professor em sala de aula. Então, com relação ao saber (ponto, reta e plano), temos:

- Saber científico – correspondendo as definições da tradução de Bicudo dos Elementos de Euclides.
- *Saber a ensinar* – correspondendo aos conceitos dos entes primitivos da Geometria (ponto, reta e plano) tomados dos livros didáticos de Matemática do 6º ano.

Análise do Livro Didático de Matemática do 6º ano: Livro 1

PNLD 1996 (corresponde ao triênio 1996 – 1997 – 1998) - MATEMÁTICA IDEIAS E DESAFIOS (5ª série) – Iracema More e Dulce Satiko Onaga, São Paulo: Saraiva, 1998.

Tabela 3. Ponto, reta e plano no livro didático 1 e na tradução de Bicudo dos Elementos de Euclides.

ENTES PRIMITIVOS DA GEOMETRIA	OS ELEMENTOS DE EUCLIDES	LIVRO 1 MATEMÁTICA IDEIAS E DESAFIOS (5ª série) – Iracema More e Dulce Satiko Onaga, São Paulo: Saraiva, 1998.
PONTO	Ponto é o que não tem partes, ou o que não tem grandeza alguma.	Uma estrela no céu, um grão de areia, a marca da ponta de um lápis nos dão a ideia de um ponto.
RETA	Linha reta é aquela, que está posta igualmente entre as suas extremidades.	Um raio de sol, um fio de linha esticado nos dão ideia de uma reta. As retas são imaginadas sem começo, sem fim e sem espessura.
PLANO	Superfície plana é aquela, sobre a qual assenta toda uma linha reta entre dois pontos quaisquer, que estiverem na mesma superfície.	A superfície de uma foto, a superfície da capa de um livro nos dão ideia de uma parte de um plano. Os planos são imaginados estendendo-se em todas as direções e sem espessura.

O Saber científico

Na obra de Euclides (Os Elementos), tomando como base a tradução de Bicudo (2009, p. 97), o ponto, a reta e o plano são apresentados como verdades iniciais por meio de definições e não estão associados a figuras que pudessem nos remeter as ideias do que são um ponto, uma reta e um plano. Segundo Bicudo (2009, p. 97), temos: Ponto - Ponto é aquilo de que nada é parte. Reta - E a linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma. Plano - Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma. Também é necessário ressaltamos que antes da definição de reta, por exemplo, existem outras para embasar essa definição, segundo Bicudo (2009, p. 97), “E linha é comprimento sem largura. E extremidades de uma linha são pontos”.

O Saber a ensinar

Neste livro didático de matemática do ano de 1998, os conceitos - entendendo conceito segundo (Durozoi, 1993, p. 26), “como todo processo que possibilita a descrição, a classificação e a previsão dos objetos cognoscíveis” – os conceitos de ponto, reta e plano são abordados como ideias, no sentido de um objeto qualquer do pensamento, isto é, uma representação em geral. Porém, não é explicitado que o ponto, a reta e o plano não podem ser definidos. Essas ideias apresentadas pelas autoras são exemplificadas através da ilustração de várias figuras. As autoras também se utilizam da imaginação – imaginação entendida como a possibilidade de evocar ou produzir imagens, independente da presença do objeto a que se referem, segundo (Abbagnano, 2012, p. 45). De acordo as autoras (More & Onaga, 1998, p. 222 – 223 - 224): O ponto é uma ideia, como por exemplo uma estrela no céu ou grão de areia ou a marca da ponta de um lápis no papel, para a reta temos: um raio de sol, um fio de linha esticado nos dão ideia de uma reta. As retas são imaginadas sem começo, sem fim e sem espessura. Com relação ao plano, temos nesse livro: a superfície de uma foto, a superfície da capa de um livro nos dão ideia de uma parte de um plano. Os planos são imaginados estendendo-se em todas as direções e sem espessura. Percebe-se que para a abordagem dos

conceito dos entes primitivos da Geometria, nesse exemplar de livro didático do ano de 1998, as autoras recorrem ao uso da ideia e da imaginação, utilizando exemplos de objetos reais, procurando fazer a ligação entre esses objetos reais e os objetos geométricos. Uma questão oportuna para ser enfatizada nessa discussão, consiste em o livro não fazer referência que não se pode confundir o objeto representado com o objeto geométrico em si. Por exemplo, uma estrela no céu é apenas uma representação do objeto geométrico ponto, portanto, uma estrela no céu não é um ponto, mas apenas a sua representação.

Análise do livro didático de matemática do 6º ano: Livro 7

PNLD 2014 (corresponde ao triênio 2014 – 2015 – 2016): PROJETO TELÁRIS: MATEMÁTICA 6 (6º ano) – Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2014.

Tabela 4. Ponto, reta e plano no livro didático 7 e na tradução de Bicudo dos Elementos de Euclides.

ENTES PRIMITIVOS DA GEOMETRIA	OS ELEMENTOS – EUCLIDES (IRINEU BICUDO, 2009)	<i>LIVRO 7</i> PROJETO TELÁRIS: MATEMÁTICA 6 (6º ano) – Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2014.
PONTO	Ponto é aquilo de nada é parte.	O centro do campo de futebol nos dá a ideia de ponto.
RETA	E a linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.	O segmento de reta representado pela largura do campo, prolongado nos dois sentidos.
PLANO	Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.	O gramado (ou piso) do campo se expandindo em todas as direções.

O Saber científico

Na obra de Euclides (Os Elementos), tomando como base a tradução de Bicudo (2009, p. 97), o ponto, a reta e o plano são apresentados como verdades iniciais por meio de definições e não estão associados a figuras que pudessem nos remeter as ideias do que são um ponto, uma reta e um plano. Segundo Bicudo (2009, p. 97), temos: Ponto - Ponto é aquilo de que nada é parte. Reta - E a linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma. Plano - Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma. Também é necessário ressaltamos que antes da definição de reta, por exemplo, existem outras para embasar essa definição, segundo Bicudo (2009, p. 97), “E linha é comprimento sem largura. E extremidades de uma linha são pontos”.

O Saber a ensinar

Neste livro didático de matemática do ano de 2014, os conceitos - entendendo conceito como todo processo que possibilita a descrição, a classificação e a previsão dos objetos cognoscíveis, segundo Durozoi (1993, p. 26) - são abordados como ideias, no sentido de um objeto qualquer do pensamento, isto é, uma representação em geral. O autor também não deixa explícito se o ponto, a reta e o plano não podem ser definidos. Segundo Dante (2014, p. 74), o ponto é representado pelo centro de um campo de futebol, o gramado de um campo de futebol nos dá ideia de um plano, e a reta é o prolongamento de um segmento de reta em ambos os sentidos, que correspondem aos traçados das laterais do campo. Neste livro, o autor, utilizou a figura de um objeto real, o campo de futebol, para apresentar os conceitos de ponto, reta e plano. A figura utilizada por Dante, para a apresentação desses conceitos, está bem próxima ao cotidiano dos alunos, pois o futebol é o esporte mais praticado no Brasil.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando entrei no mestrado fiz minha dissertação no campo da Didática da Matemática, sendo mais específico na área didática da matemática de influência francesa. A teoria da transposição didática de Chevallard (1991) me despertou para pensar nos conceitos primitivos da Geometria Plana (ponto, reta e plano), que surgiram na obra de Euclides - Os Elementos – no sentido de entender como esses conceitos são abordadas nos livros didáticos de Matemática no 6º ano do ensino fundamental. Com esse estudo foi possível traçar um pouco da trajetória desse objetos de ensino, corroborando com as ideias de Chevallard, no sentido deles terem sofrido modificações e transformações, desde o seu surgimento na comunidade científica até a abordagem nos livros didáticos pesquisados, isto é, antes de sua entrada na sala de aula. Os livros didáticos de Matemática analisados quase sempre seguem a mesma linha de raciocínio, ao apresentarem os conceitos do ponto, da reta e do plano, recorrendo a ideias – segundo Abbagnano (2012), ideia no sentido de um objeto qualquer, isto é como uma representação em geral. Para essa representação genérica dada aos objetos geométricos o ponto, a reta e o plano, os autores dos livros didáticos se utilizam de outras figuras geométricas, tais como: o cubo, o círculo, o trapézio, também são utilizadas figuras do cotidiano dos alunos, como por exemplo, carros, aviões, campos de futebol, relógios etc. Vale ressaltar que essas representações não podem ser confundidas com os próprios objetos geométricos, uma vez que esses entes são imaginários se situam no âmbito da imaginação do indivíduo. Os conceitos de ponto, reta e plano, são abordados pelos autores de livros didáticos de matemática, de uma maneira, que talvez, possamos compreender como bastante linear. O surgimento desses entes primitivos (ponto, reta e plano) vem da obra de Euclides – Os Elementos – e das suas inúmeras edições e revisões, umas das revisões que merece destaque é a de Théon de Alexandria, por ser considerada a revisão que deu origem ao que basicamente se utiliza nos livros didáticos de matemática. David Hilbert mais recentemente com seu estudo trouxe contribuições importantes para a área da geometria. A tradução dos Elementos de Euclides do professor Irineu Bicudo (2009), apresenta os entes primitivos como definições, no entanto essas definições aparecem nos livros didáticos como conceitos, como já mencionado. Percebe-se, então que esses conceitos sofreram transformações e mudanças antes de sua entrada na sala de aula, corroborando com as ideias de Chevallard (1991).

REFERÊNCIAS

- ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de filosofia**. Tradução da 1ª edição brasileira coordenada e revisada por Alfredo Basi; revisão e tradução dos novos textos Ivone Castilho Benedetti – 6ª ed. – São Paulo, SP: Editora WMF Martins Fontes, 2012.
- BADEM, Enciclopédia. Direção editorial de Orlando Vicente; 14ª edição, vol. 4. São Paulo – SP: Livraria Editora Iracema LTDA, 1985.
- AG ALMOULOU, Saddo. **A didática da Matemática**. São Paulo: PUC, 1995.
- BERLINGHOFF, William P. GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. São Paulo: Ática, 2010.
- BICUDO, Irineu. **Os Elementos/Euclides**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide – 2ª ed. – São Paulo: Edgar Blucher, 1996.
- BRASIL, Lei de Diretrizes e Bases da Educação. Lei nº 9.394/1996 e demais alterações. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasil, 2017.
- BRITO MENEZES, A. P. A. **Contrato Didático e Transposição Didática: Inter-relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação à Álgebra na 6ª série do Ensino Fundamental**. Tese de Doutorado não publicada. Programa de Pós-graduação em Educação. Recife: UFPE, 2006.
- CAJORI, Florian. **Uma história da Matemática**. (Tradução Lázaro Coutinho). Rio de Janeiro, RJ: Editora Ciência Moderna LTDA., 2007.
- CHEVALLARD, Yves. **LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA: Del saber sábio al saber enseñado**. Buenos Aires, Argentina: Aique grupo Editor S.A., 1991.

- COMMANDINO, Frederico. **Euclides - Elementos de Geometria**. São Paulo: Edições Cultura, 1944.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. **Uma história concisa da matemática no Brasil**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.
- DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática** (5ª série). São Paulo: Ática, 2005.
- DANTE, Luiz Roberto. PROJETO TELÁRIS: MATEMÁTICA 6 (6º ano) – São Paulo: Ática, 2014.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.
- FREITAS, José Edson de Medeiros; BOTELHO, Carlos Alberto de Lima. Recife – PE: Edições Esuda, 1974.
- GEORGES, Ifrhar. **Os números: história de uma grande invenção**. Tradução Stella Maria de Freitas Senra – 11. ed. – São Paulo: Globo, 2005.
- GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. - 6. ed. - São Paulo: Atlas, 2008.
- GIOVANNI, José Rui; PARENTE, Eduardo. **APRENDENDO MATEMÁTICA (5ª série)** – São Paulo: FTD, 2002.
- GUIA DO LIVRO DIDÁTICO. **Guia de livros didáticos ensino fundamental anos finais matemática**. BRASIL: MEC/FNDE. PNDL 2017, Brasília - 2017.
- GODOY, Arilda Schmidt Godoy. **Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais**. São Paulo - Brasil: Revista de Administração de Empresas / EAESP / FGV, 1995.
- IMENES, Luis Márcio; LELLIS, Marcelo. **MATEMÁTICA: Imenes e Lellis 6º ano**. São Paulo: Moderna, 2009.
- JUNIOR, Oscar Gonçalves. **Matemática por assunto: geometria plana e espacial**. São Paulo: Editora Scipione, 2000.
- LAJOLO, Marisa. Livro didático: um (quase) manual de usuário. Em aberto. Brasília, n. 69, v. 16, jan./mar. 1996.
- LEVI, Beppo. **Lendo Euclides: A matemática e a geometria sob um olhar renovador**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2008.
- LUDKE, M. et al. **A pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.
- MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática ideias e desafios (5ª série)**. São Paulo: Saraiva, 1999.
- MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática ideias e desafios (5ª série)**. São Paulo: Saraiva, 2012.
- OLIVEIRA, Maria Marly de. **Como fazer projetos, relatórios, monografias, dissertações e teses**. Recife: Edições Bagaço, 2003.
- PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte, MG: Autência, 2002.
- PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCNs): Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília:MEC/SEF, 1997.
- REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.
- ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- RPM. Revista do Professor de Matemática nº 42. Sociedade Brasileira de Matemática. São Paulo: USP, 2000.

SCHUBRING, GERT. **Análise histórica de livros de Matemática: notas de aula.** (Tradução Maria Laura Magalhães Gomes). Campinas, SP: Autores Associados, 2003.

SILVA, B. A. Contrato Didático/Educação Matemática: Uma Nova Introdução. Anna Franchi... [et al]; organizadora: Sílvia Dias Alcantara Machado. 3ª ed. Revista – São Paulo: EDUC, 2008.

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica.** Tradução Seiji Hariki. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

_____. Uma análise em livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental acerca da proposta do ensino de polígonos sob a ótica da teoria de Van Hiele. REVEMAT. Florianópolis (SC), v.12, n. 2, p. 115-115, 2017.