TEOREMA DE PITÁGORAS E O FRACTAL ÁRVORE PITAGÓRICA: UM EXPERIMENTO NO ENSINO FUNDAMENTAL

THEOREM OF PITAGORS AND THE FRACTAL PITAGORIC TREE: AN EXPERIMENT IN FUNDAMENTAL TEACHING

José Carlos Pinto Leivas
Universidade Franciscana, UFN
Santa Maria, RS, Brasil
leivasjc@unifra.br

Anne Desconsi Hasselmann Bettin
Rede de Ensino do Rio Grande do Sul
Santa Maria, RS, Brasil
nanydh@yahoo.com.br

Resumo. Este artigo aborda uma pesquisa qualitativa, o qual teve por objetivo utilizar noções de geometria euclidiana de alunos de um nono ano do Ensino Fundamental, para perceberem a necessidade de reconhecerem alguns aspectos de geometria fractal, a fim de melhor compreenderem o mundo em que vivem. Como metodologia de ensino, foi empregada a Teoria de Van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio em geometria, juntamente com o software Geogebra na construção do fractal Árvore Pitagórica. Os alunos realizaram atividades de classificação de figuras geométricas e de elementos da natureza, as quais permitiram agrupá-los por propriedades ou características em duas geometrias e, com exploração do recurso da fotografia, foi possível, por exemplo, identificar a característica de autossemelhança dos objetos fractais. Os resultados da pesquisa mostraram a eficiência, tanto da Teoria de Van Hiele, quanto do Geogebra na compreensão de propriedades das duas geometrias, em particular, sobre o teorema de Pitágoras.

Palavras chave: ensino fundamental; geometria fractal; pitágoras.

Abstract. This article approaches a qualitative research that had as objective to use some notions of euclidean geometry of students of a nineth year of Elementary School to realize the need to know some aspects of fractal geometry to understand the world in which they live. As a teaching methodology was used Van Hiele Theory for the development of reasoning in geometry with the software Geogebra in the construction of the fractal Pythagorean Tree. The students realized activities of classification of geometric figures and elements of nature, that allowed them to group them in properties or characteristics in two geometries and, with exploration of the photography resource, it was possible, for example, to identify the self-similarity characteristic of the fractal objects. The results of the research showed the efficiency of the Van Hiele Theory and Geogebra in the understanding of properties of the two geometries, in particular, on the Pythagorean theorem.

Keywords: elementary school; geometry fractal; pythagoras.

INTRODUÇÃO

A geometria é uma área da Matemática, assim como álgebra, aritmética e trigonometria, sendo que a mais conhecida no meio escolar é a geometria euclidiana. Sendo assim, no intuito de levar os alunos a conhecerem outras geometrias, apresenta-se o resultado de uma investigação feita com uma das geometrias não euclidianas, fractal, no Ensino Fundamental. Teve-se como justificativa ampliar os conhecimentos geométricos dos alunos, enfocando a existência de outro tipo de geometria, a qual é raramente abordada nos livros didáticos e que é importante para entender o mundo no qual se vive.

Assim, delineou-se o seguinte objetivo de pesquisa: utilizar algumas noções de geometria euclidiana de alunos de um nono ano do Ensino Fundamental para perceberem a necessidade de conhecerem alguns aspectos de geometria fractal, a fim de melhor compreenderem o mundo em que vivem.

A escolha pelo tema deu-se pela compreensão da investigadora da necessidade de introduzir, no Ensino Fundamental, a noção de geometria fractal e, por meio dela, desenvolver conteúdos como ponto, reta, segmento, ângulos, polígonos, regiões poligonais, quadrado, triângulo, círculo, circunferência, interseção, reflexão, simetria, comprimento, perímetro, área, utilizando uma sequência de atividades, levando em consideração a metodologia de ensino denominada Teoria de Van Hiele. Optou-se pelo uso do software Geogebra na construção de um fractal que pode ser empregado na exploração do ensino do Teorema de Pitágoras, o qual é um dos assuntos da Matemática ensinados ao final do Ensino Fundamental.

A GEOMETRIA FRACTAL

Muitas figuras estranhas criadas por matemáticos eram difíceis de serem enquadradas na geometria euclidiana e, por isso, eram chamadas de monstros matemáticos, sendo conhecidos atualmente por fractais.

Mandelbrot é célebre como o pai da Geometria Fractal, ramo da Matemática que estuda as propriedades e o comportamento dos fractais. Esses são figuras geométricas não euclidianas, cujas dimensões espaciais não são, necessariamente, inteiras, podendo ser fracionárias ou até mesmo irracionais. Algumas vezes, essa geometria é dita a geometria da natureza, por se encontrarem figuras similares às construídas matematicamente e por apresentarem características muito similares aos fractais matemáticos.

Jelinek e Kampff (2009, p.78) ressaltam que "cabe colocar que a Geometria Euclidiana pode ser associada às construções realizadas pelo homem. Entretanto, as formas mais comuns na natureza nunca se associam com as formas até então definidas".

Segundo esses autores,

> o nome fractal deriva do latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo *frangere* corresponde a quebrar, fragmentar. E quando nos referimos à Geometria Fractal, estamos falando do estudo dos fractais. Cabe destacar que essas formas possuem características especiais, sendo a principal delas a autossimilaridade, uma vez que constituem uma imagem de si próprios em cada uma das partes. (Idem, p. 78)

De acordo com Janos (2008, p. X), a Geometria Fractal é definida como "uma linguagem matemática que descreve, vê, analisa e modela as formas encontradas na natureza".

Geralmente, um fractal é criado por um processo repetitivo com detalhes autossimilares, de escala e complexidade infinita, como o exemplo da Figura 1. Pode-se perceber, em elementos da natureza, que existe uma autossemelhança aproximada, pois conforme Janos (2008, p. 35), "em diferentes escalas, essa autossemelhança existe em média" e tem uma invariância na mudança de escala, como, por exemplo, em uma couve-flor. Tirando-se uma foto e selecionando uma parte dessa foto, ampliando-a até ficar do mesmo tamanho da original, é difícil perceber qual é a parte e qual é o todo.

Figura 1. Exemplo de fractal.
Fonte: Hype Science.

Nos fractais matemáticos, que são construídos por métodos matemáticos, pode-se citar: a Samambaia de Barnsley, na qual os ramos que partem do caule são réplicas reduzidas exatas da própria; a curva de Koch, na qual uma das versões é o floco de neve; a cesta de Sierpinski; a árvore pitagórica, que se baseia na representação geométrica do teorema de Pitágoras. Todos eles são objetos geométricos construídos pelo homem.

Hoje, a geometria fractal é aplicada em várias áreas, como no desenvolvimento de microchips, em medicamentos para reduzir custo e aumentar sua eficácia, em pesquisas na topologia, na climatologia, na microbiologia e nas ciências da computação, para citar algumas.

No teorema de Pitágoras considera-se um triângulo retângulo, cujos seus lados menores são os catetos e o maior é a hipotenusa. Segundo Tomei (2003, p. 42):

> o teorema de Pitágoras diz que se b e c são os comprimentos dos catetos e a é o da hipotenusa, então $a^2=b^2+c^2$. [...] para ser um pouco mais fiel ao texto pitagórico, o que foi realmente dito (e demonstrado) é que a soma das áreas dos dois quadrados sobre os catetos é igual à área do quadrado sobre a hipotenusa: aliás, você acreditaria nisso olhando a figura?

Conforme Tomei (2003, p. 45), esse teorema já era conhecido dos antigos egípcios de alguma maneira, pois os impostos eram baseados na produção agrícola e essa dependia da terra inundada pelo rio Nilo todos os anos. Para a medição das terras, existiam pessoas chamadas de agrimensores, muito importantes naquela época, os quais possuíam uma ferramenta para medição que "consistia no triângulo retângulo de lados proporcionais aos números 3, 4 e 5, feito de um barbante, com nós igualmente espaçados".

Nasser e Santa'anna (1998, p. 79) enunciam o teorema em termos de área da seguinte maneira: "a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos".

O MODELO DE VAN HIELE

A aprendizagem de geometria passa por diferentes níveis de pensamento que variam de indivíduo para indivíduo, desde a visualização, a identificação das propriedades até a demonstração formal de um resultado em geometria.

Segundo Nasser e Santa'anna (1998, p.4):

> o modelo de Van Hiele para o pensamento em geometria foi criado por Pierre Van Hiele e sua esposa, Dina Van Hiele-Geoldof, tendo por base as dificuldades apresentadas por seus alunos do curso secundário na Holanda. O modelo sugere que os alunos progridam segundo uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto eles aprendem geometria.

Na teoria de Van Hiele, para o desenvolvimento do pensamento geométrico e para a aprendizagem de um determinado conteúdo, podem ser avaliadas habilidades demonstradas pelos alunos durante as atividades propostas em sala de aula. Essa teoria leva o aluno a avançar por cinco níveis de desenvolvimento cognitivo: o reconhecimento, a análise, a ordenação, a dedução e o rigor. Para Nasser e Santa'anna (1998, p. 4), "o progresso de níveis depende mais de aprendizagem adequada do que de idade ou maturação".

Brunet, Leivas e Leyser (2007, p.70), a respeito da teoria de Van Hiele, afirmam que"a teoria sugere, ainda, que o pensamento geométrico evolui de modo lento, iniciando por formas de pensamento simples, como a visualização, e atingindo formas mais avançadas como a dedutiva, na qual a intuição e a dedução se articulam".

Villiers (2010, p. 401) descreve características gerais de cada nível do modelo de Van Hiele da seguinte maneira:

> Nível 1 – reconhecimento ou visualização: os alunos reconhecem as figuras, visualmente, por sua aparência global. Reconhecem triângulos, quadrados, paralelogramos, entre outros, por sua forma, mas não identificam as propriedades de tais figuras explicitamente.
> Nível 2 – análise: os alunos começam a analisar as propriedades das figuras e aprendem a terminologia técnica adequada para descrevê-las, mas não correlacionam figuras ou propriedades.
> Nível 3 – ordenação: os alunos realizam a ordenação lógica das propriedades de figuras por meio de curtas sequências de dedução e compreendem as correlações entre as figuras (por exemplo, inclusões de classe).
> Nível 4 – dedução: os alunos começam a desenvolver sequências mais longas de enunciados e a entender a significância da dedução, o papel dos axiomas, teoremas e provas.

Cada nível passa por cinco fases da aprendizagem, sendo a primeira a da informação/interrogação, em que se evidenciam os conhecimentos prévios, passando pela segunda fase, da orientação dirigida, ou seja, o ensino ocorre por meio de uma sequência de atividades concretas, seguida pela terceira fase, que é a explanação, na qual os alunos se expressam por meio da linguagem oral ou escrita. Depois vem a quarta fase da orientação livre, na qual eles resolvem atividades com o conhecimento adquirido. Nasser et al.(2000) acrescenta, ainda, um nível 5 do rigor, onde os alunos estabelecem teoremas, comparam e demonstram, ao qual corresponde a quinta fase, "integração", onde se forma uma visão geral do conteúdo.

Nem todos os alunos têm o mesmo desenvolvimento cognitivo do pensamento geométrico. Independente da sua idade e maturação, eles devem vivenciar atividades adequadas para sua compreensão e de forma ordenada, pois, segundo essa teoria, os alunos irão progredir seguindo a sequência de níveis de compreensão. Sendo assim, o professor deve buscar estratégias para promover nos alunos o aumento dos níveis de compreensão.

CONTEXTO DA PESQUISA E METODOLOGIA

A pesquisa

O trabalho descrito foi desenvolvido em uma escola Estadual de Ensino Fundamental de Santa Maria, pequena, que atende alunos da Educação Infantil, Ensino Fundamental I e II e EJA no período noturno.

A pesquisa foi realizada numa turma de nono ano do Ensino Fundamental, durante as aulas de Matemática, com os oito alunos que estavam presentes nos dois dias da aplicação. A escolha aliou o fato de a autora ser a professora regente da turma com o conteúdo de geometria desenvolvido neste nível, especialmente no que diz respeito ao Teorema de Pitágoras, o qual consta no programa da disciplina e, para desenvolvê-lo, pensou-se que o estudo de fractais poderia se caracterizar como uma forma metodológica de inserir um tema curioso e instigante que oportunizasse uma abordagem/diálogo com outros temas como História da Matemática, Geometria Não-Euclidiana e recursos tecnológicos, dentre outros.

O trabalho foi desenvolvido por meio de uma metodologia qualitativa e quantitativa, partindo da Árvore Fractal Pitagórica, a qual se apresentou como uma possibilidade de introduzir a noção de fractal. Buscou-se enfatizar e revisar conceitos de geometria envolvidos na construção, tais como medida de comprimentos, perímetro, área, reta, ponto, segmento de reta, ângulos, polígonos, regiões poligonais, quadrado, triângulo, círculo, circunferência, interseção, reflexão e simetria. Isso mostra ser uma forma diferenciada de desenvolver conteúdos de geometria, muitas vezes, omitidos da escola com a alegação de falta de tempo de desenvolvê-la. O teorema de Pitágoras é um conteúdo do currículo do nono ano do Ensino Fundamental e, portanto, acredita-se que introduzi-lo e desenvolvê-lo usando uma construção fractal pode contribuir para uma visão mais ampla de geometria.

O estudo foi desenvolvido na turma em dois momentos: primeiro, em sala de aula, e, segundo, no laboratório de informática. Para a coleta de dados, utilizou-se os registros escritos dos alunos, os relatos feitos pelos mesmos, fotos capturadas durante a aplicação, diário de campo da pesquisadora, arquivos das construções feitas por eles no Geogebra e os respectivos protocolos.

As atividades da pesquisa

As cinco atividades elaboradas e descritas a seguir foram realizadas levando-se os alunos à percepção da necessidade de conhecer algumas noções de geometria fractal com a construção da Árvore Pitagórica.

ATIVIDADE 1: nível 1 – básico reconhecimento[1]

Objetivo – associar objetos do cotidiano a formas geométricas conhecidas, com base na sua aparência global.

Procedimentos – foram distribuídas, pela professora, figuras diversificadas, já recortadas, como bola, samambaia, relâmpago, caixa, árvore, porta-retrato, porta, brócolis e copo (Anexo A), para que os alunos associassem a cada uma das formas geométricas a serem identificadas. Esperava-se que os educandos percebessem a impossibilidade de associar, a algumas delas, uma forma geométrica conhecida.

Essa atividade poderia ser desenvolvida, individualmente ou em grupos, e cada aluno (ou grupo) pegaria as figuras, associando-as às respectivas formas geométricas.

ATIVIDADE 2: nível 2 – análise[2]

Objetivo - analisar as figuras distribuídas e reconhecer algumas propriedades ou características.

Procedimentos - as figuras da atividade 1 deveriam ser coladas em uma folha, de modo que fossem classificadas em dois grupos: formas geométricas conhecidas e desconhecidas, atribuindo ao menos duas características a cada uma.

Esperava-se que os alunos percebessem elementos comuns, diferentes e reconhecessem algumas características das mesmas. Foi fornecida uma grade em que isso deveria ser registrado (Figura 2).

	Forma Geométrica		
Figura	**Conhecida**	**Não conhecida**	**Características**

[1]Atividade adaptada de Padilha, (2012, p.45).
[2] Atividade adaptada de Padilha, (2012, p.45).

Figura 2. Grade de registros. **Fonte:** arquivo pessoal.

ATIVIDADE 3: Nível 3 – síntese ou abstração

Objetivo - analisar e perceber a necessidade de uma definição formal, bem como argumentação lógica informal da forma geométrica não euclidiana.

Procedimento - foi entregue uma couve-flor para a turma e, depois, solicitado que os alunos pegassem uma parte qualquer da mesma, a repartissem pela metade e, novamente, fizessem o mesmo para cada uma das duas partes. Após observar e analisar a hortaliça, deveriam responder, na folha de registro, o que foi possível perceber após parti-la. Em seguida, com a câmera fotográfica do celular, deveriam registrar, por meio de aproximação com zoom da câmera, em uma das partes menores, a fim de comparar com uma das outras partes menores, com as maiores e o total e fazer registros das observações.

O objetivo dessa atividade era que os alunos percebessem que haviam semelhanças entre as partes do todo, isto é, são autosemelhantes ou autossimilares. Essa é uma propriedade da geometria fractal.

O registro foi feito em uma folha fornecida pela professora e pelas fotos obtidas.

ATIVIDADE 4: nível 4 – dedução

Objetivo – reconhecer condições necessárias e suficientes nas duas geometrias para diferenciá-las e verificar características próprias de cada uma delas.

Procedimento – com base nas atividades 2 e 3, os alunos preencheriam a ficha fornecida pela professora.

Esperava-se que os alunos conseguissem comparar as duas geometrias e verificassem diferenças e semelhanças entre elas.

O registro deveria ser feito na ficha (Figura 3), observando o que fosse feito nas atividades anteriores.

	GEOMETRIA EUCLIDIANA	**GEOMETRIA FRACTAL**
Quanto à forma geométrica		
Padrão de repetição		
Origem dos objetos		
Complexidade		
Regularidade		

Figura 3. Ficha para preenchimento. **Fonte:** arquivo pessoal.

ATIVIDADE 5: nível 4 – dedução

Objetivo – construir uma Árvore Pitagórica.

Procedimentos – nessa atividade, os alunos foram ao laboratório de informática da escola, no qual o software Geogebra já estava instalado nos computadores. Como não o conheciam, foi explanado o seu funcionamento, de maneira dialogada, para que conseguissem acompanhar as orientações e construíssem o fractal.

Durante as aulas de Matemática, os alunos começaram a estudar o teorema de Pitágoras e construíram um quebra-cabeça pitagórico. Assim, esperava-se que eles conseguissem construir o fractal "Árvore Pitagórica", com o auxílio do software Geogebra, relacionassem e compreendessem conteúdos relacionados à geometria plana, explorando essa construção fractal. Acreditava-se que pudessem associar à construção os conhecimentos adquiridos em sala de aula.

O registro foi feito na própria folha constante de cada etapa e pelos arquivos do Geogebra, salvos com o nome de cada aluno na área de trabalho dos computadores. Para que os alunos progredissem na construção, foram fornecidas algumas etapas, as quais seguiam a sequência de níveis de compreensão de conceitos, que são as que seguem.

Etapa 1. Construir um quadrado, seguindo os passos abaixo:

1) Considere dois pontos distintos, A e B, e trace um segmento de reta, unindo-os.
2) Determine o ponto médio C do segmento AB.
3) Construa duas circunferências, uma com centro em A e raio igual à medida do segmento AB e outra com centro em B e com o mesmo raio.
4) Com a ferramenta intersecção, obtenha os pontos D e E, comuns às duas circunferências.
5) Trace uma reta r, passando por D e C. Observe a construção e escreva o que você pode concluir.
6) Com a ferramenta ângulo, clique nos pontos B, C e D no sentido horário. O que você pode constatar?
7) Com a ferramenta reta paralela, construa uma reta paralela à reta CD, passando por A, depois outra, passando por B.
8) Com a ferramenta interseção de dois objetos, crie os pontos F e H, sendo esses a interseção das circunferências com as paralelas criadas.
9) Com a ferramenta polígono, construa o quadrado, passando pelos pontos A, B, F e H. Depois, esconda os demais objetos utilizados para a construção.
10) Quais as propriedades que definem esse polígono? Como você pode verificar, sua construção é um quadrado. Como você poderia usar as ferramentas disponíveis no software diretamente?

Embora os passos possam direcionar para um 'enclausuramento' da atividade, percebeu-se que os alunos não se limitavam aos mesmos, explorando o dinamismo do software e os objetos constantes do mesmo, relacionando aos conhecimentos prévios de geometria que haviam trabalhado em séries anteriores. As argumentações decorrentes foram o ponto de destaque a analisar.

Etapa 2. Construção da primeira etapa da Árvore Pitagórica.

1) Com a ferramenta ângulo com amplitude fixa, selecione os pontos F e H, nessa ordem. Coloque 45º no sentido horário. Isso determina um ponto F'. Repita a operação, selecionando os pontos H e F, agora no sentido anti-horário.
2) Trace uma reta, passando por H e F', depois outra, por F e H' e obtenha a intersecção J das duas.
3) Qual a figura geométrica criada? Como ela é classificada quanto aos lados? E quanto aos ângulos?
4) Com a ferramenta polígono, contorne-a. Construa quadrados em cada cateto do polígono formado.
5) Esconda os objetos, deixando apenas os polígonos. Se preferir pode mudar as cores deles.
6) Calcule:
   a) o comprimento de cada lado e a área de cada figura;
   b) no triângulo construído IDENTIFIQUE a hipotenusa;
   c) qual a relação entre as áreas dos três quadrados?

Obs.: esperava-se que a imagem obtida pela construção no software fosse como na representação feita na Figura 4.

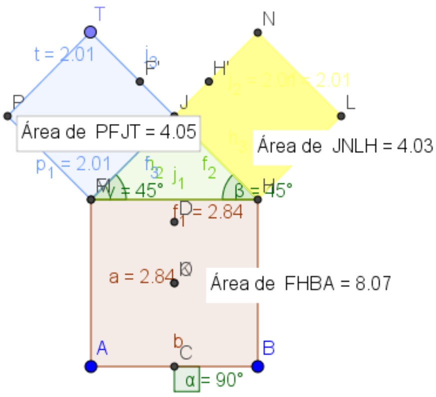


Figura 4. Uma representação geométrica do teorema de Pitágoras. **Fonte:** arquivo pessoal.

Etapa 3. Construção da segunda etapa da Árvore Pitagórica.

Em cada quadrado construído, no cateto do polígono formado na etapa anterior, construa um triângulo retângulo, de modo que o lado do quadrado seja a hipotenusa. Posteriormente, em cada cateto do triângulo retângulo, construa um quadrado que tenha tal cateto por lado.

Etapa 4. Construção da terceira etapa Árvore Pitagórica.

Para acelerar o processo de construção, é preciso criar uma ferramenta a partir da construção anterior. No menu ferramenta, clique em criar uma nova ferramenta e, em objetos finais, selecione o triângulo e os dois quadrados construídos sobre seus catetos (etapa 2), depois, nos vértices. Na aba objeto inicial, selecione os pontos A e B; na aba nome e ícone, coloque 'galho'. Assim, é possível fazer várias interações, formando a Árvore Pitagórica (Figura 5).

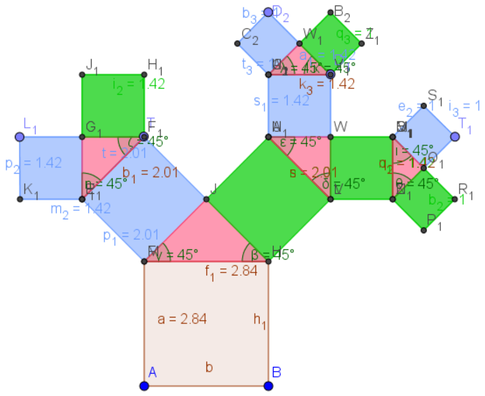


Figura 5. Representação geométrica do teorema de Pitágoras. **Fonte:** arquivo pessoal.

Os estudantes foram orientados a responderem aos questionamentos a seguir, a fim de formular o teorema.

1) Você identifica algum padrão na construção? E se for feita uma quarta etapa?
2) Identifica alguma similaridade com algum elemento da natureza? Se sim, qual?
3) Existe algum eixo de simetria?
4) No primeiro traçado, quantos galhos você desenhou? Construa um quadro, conforme Figura 6.

Interação	Quantidade de galhos
1º traçado	
2º traçado	
3º traçado	
4º traçado	
5º traçado	

Figura 6. Quadro com a quantidade de galhos. **Fonte:** arquivo pessoal.

5) Existe alguma relação entre a quantidade de galhos? É possível determinar uma fórmula para expressar a quantidade total de galhos?
6) Como você poderia generalizar?

ATIVIDADE 6: nível 5 – Rigor.

Objetivo - estabelecer o teorema, comparar e demonstrar.

Procedimentos – nessa atividade, os alunos iriam analisar a construção do fractal.

Esperava-se que eles conseguissem formalizar, ou seja, estabelecer o enunciado do teorema de Pitágoras e comparar ou formalizar uma compreensão do que seja geometria fractal.

Os alunos deveriam registrar, na folha fornecida, as respostas aos questionamentos a seguir.

a) Como você enunciaria o teorema de Pitágoras?
b) O que você aprendeu sobre a geometria fractal?

APLICAÇÃO DA ATIVIDADE E ANÁLISE DE DADOS.

As atividades foram realizadas, em cinco aulas, sendo a primeira, em sala de aula, e as demais no laboratório de informática. Os alunos optaram por se organizarem em duplas e receberam as figuras da atividade 1, tendo ocorrido dúvidas em algumas figuras, pois não conseguiam associar, de imediato, uma forma geométrica. Segundo a teoria de Van Hiele, o nível básico de reconhecimento foi alcançado por todos, pois reconheceram as figuras por sua aparência global, mas não identificaram, explicitamente, as propriedades. Assim, atingiram-se os objetivos propostos nessa atividade.

Na atividade 2, as figuras foram coladas na folha fornecida e classificadas em dois grupos: formas geométricas conhecidas e desconhecidas. Atribuíram algumas características para cada figura (Figura 7), as quais foram muito discutidas entre eles, o que contribuiu para reforçar as propriedades das figuras geométricas planas já estudadas. Essa atividade proporcionou uma análise das propriedades de algumas figuras e a busca de uma terminologia correta, mas não correlacionaram figuras ou propriedades, o que corresponde ao nível 2 da teoria de Van Hiele, que é a análise.

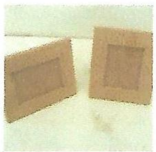
	U FORMA GEOMÉTRICA		
Figura	Conhecida	Não conhecida	Características
	C Espera		Ela é lisa Ela rola tem centro e oca
	quadrado		4 lados iguais 4 angulos de 90°
	Cilindro		Alongado pra cima e plano emboixo
	paralelepipedo		lados paralelos e opostos. tem 6 faces 8 vértices
		não conhecida	não liso parece um monte de árvoreginhas
		não conhecida	Muitos galhos e muito curvada
		não sei	Várias partes iguais
		não sei	Faiscas elétricas

Figura 7. Atividade 2 da dupla C. **Fonte:** arquivo pessoal.

Na atividade 3, com a couve-flor, observou-se que os alunos ficaram surpresos com a experiência, pois parecia que haviam tirado foto da couve-flor inteira, conforme relatado por uma das duplas. Depois, dialogando com a turma toda, chegaram à conclusão que isso ocorre, também, naquelas figuras que não conseguiram associar uma forma geométrica. Então, tentaram sintetizar e abstrair essa conclusão na busca de uma relação entre as figuras, como se tivessem separando-as por classe. Depois, foi discutido e informado que essa é uma propriedade da geometria fractal, chamada de autossemelhança. A professora explanou superficialmente sobre essa geometria.

Figura 8. Atividade 3 da dupla D. **Fonte:** arquivo pessoal.

Durante a atividade 4, parece que ficaram melhor compreendidas as ideias sobre fractais, pois, ao preencherem o quadro (Figura 9), eles foram se dando conta das diferenças entre as duas geometrias, as quais pareciam estar confusas, de início, para eles. Tentaram deduzir o que faz um objeto ter propriedade da geometria euclidiana ou da fractal.

ATIVIDADE 4

	GEOMETRIA EUCLIDIANA	GEOMETRIA FRACTAL
Quanto a forma geométrica	é conhecida	não é conhecida
Padrão de repetição	não	sim
Origem dos objetos	homem que cria	natureza
Complexidade	não	sim
Regularidade	sim	não

Figura 9. Atividade 4 da dupla B. **Fonte:** arquivo pessoal.

A atividade 5 apresentou muitos contratempos, pois os computadores demoraram muito para abrir os programas. Apenas quatro deles estavam funcionando corretamente e um não ligou nas últimas três aulas, comprometendo o trabalho de uma das duplas.

Os alunos não conheciam o software, por isso, foi explanado, primeiramente, como ele funcionava e um deles o baixou no celular, mas como a tela era muito pequena, logo desistiu dirigindo-se a um computador, juntamente com uma dupla.

O desconhecimento do software foi rapidamente superado pelos alunos a partir da colaboração entre eles. Logo conseguiram entender como funcionava e foram muito ágeis nas construções. Na primeira etapa, em que construíram o quadrado, houve mais demora, mas todas as duplas conseguiram fazer, conforme se observa na Figura 10), a construção de uma das duplas.

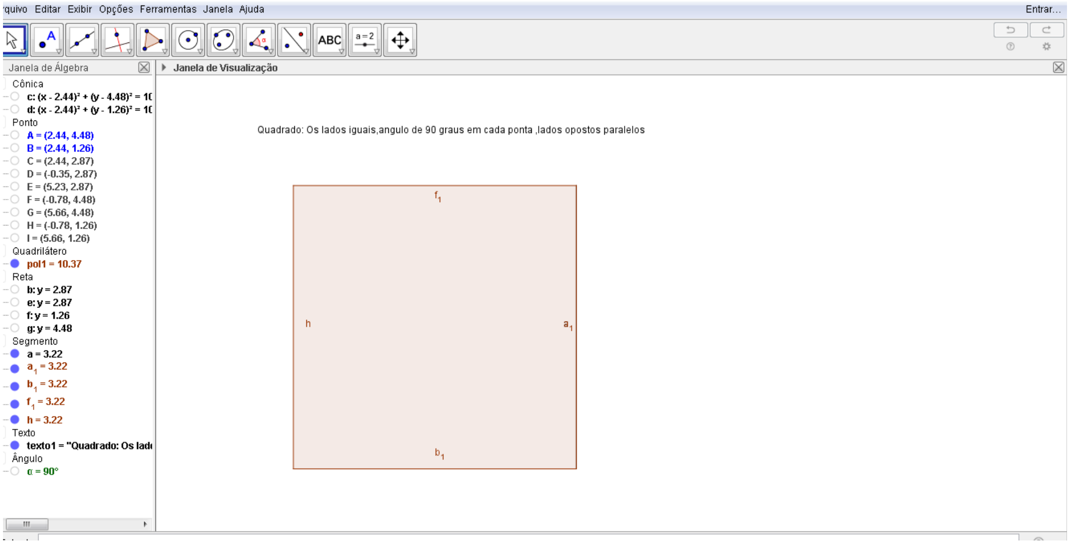


Figura 10. Atividade 5 - construção da etapa 1 da dupla C.
Fonte: arquivo pessoal.

Nessa atividade, trabalhou-se com os conceitos de ponto, reta, segmento, ponto médio, lados opostos, retas e segmentos paralelos e perpendiculares, circunferência, centro, raio, ângulos, interseção de objetos, polígono e área poligonal. Os alunos debateram e reconstruíram seus conceitos desses entes geométricos.

Na etapa 2 da atividade 5, demorou um pouco mais para os alunos compreenderem que o triângulo era retângulo, justamente pela posição em que ele ficou após ser construído, mas souberam classificá-lo quanto aos lados e aos ângulos.

Na construção dos quadrados, sobre cada cateto do triângulo, perceberam que havia uma ferramenta a qual agilizava o processo de construção dos quadrados que é o ícone polígono, e perguntaram se era possível usar. Respondeu-se positivamente à solicitação, porém, antes, foi solicitado que tentassem fazer um quadrado qualquer, num canto da janela de visualização, com as ferramentas, e tentassem movimentar os pontos da figura, para ver o que acontecia. Assim, os alunos perceberam a diferença entre os ícones polígono e polígono rígido.

Para calcular o comprimento de cada lado e a área de cada figura, fizeram uso do Geogebra e, depois da discussão inicial para identificar o triângulo retângulo, responderam corretamente onde se localizava a hipotenusa.

Com o auxílio da calculadora do celular, verificaram que a soma das áreas dos dois quadrados sobre os catetos é igual à área do quadrado sobre a hipotenusa.

A Etapa 3 foi mais tranquila em relação às iniciais. Somente uma das duplas não conseguiu realizá-la, pois o computador travou e depois não foi mais possível ligar. Ilustra-se a construção da dupla A (Figuras 11).

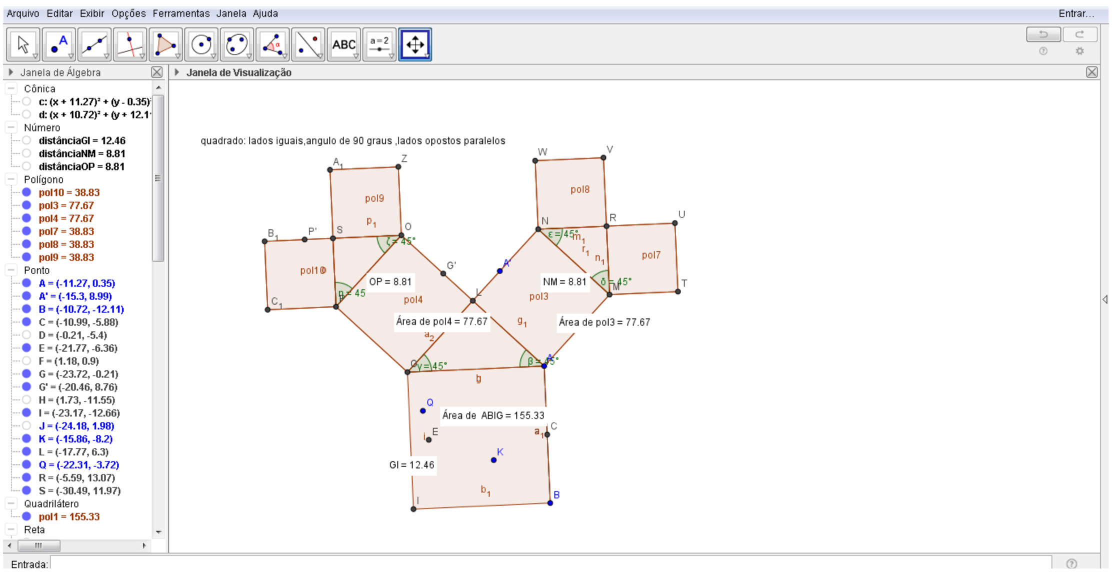


Figura 11. Atividade 5 - construção da etapa 3 da dupla A. **Fonte:** arquivo pessoal.

Na etapa 4, os alunos já haviam se dado conta de que a construção era similar a uma árvore e que era preciso fazer o mesmo processo anterior, para que aumentasse a quantidade de ramos e ficassem menores os desenhos. Eles responderam às perguntas dessa etapa, em sua maioria, corretamente, sendo que a dificuldade ficou por conta da generalização da relação entre as interações e a quantidade de galhos, o que encararam como desafio, pois após o término da aula pediram um tempo da próxima para tentarem encontrar a solução, o que conseguiram, associando à potenciação.

Somente a etapa 5 não teve seu objetivo cumprido na totalidade, visto que os alunos não conseguiram demonstrar o teorema, mas enunciaram a formulação algébrica do mesmo: $a^2 = b^2 + c^2$. Não conseguiram compreender e entender o significado do teorema de Pitágoras como sendo a soma dos quadrados das medidas dos catetos, apesar de representarem, na forma simbólica, a medida dos catetos por "cat" e medida da hipotenusa, por "A", conforme Figura 12.

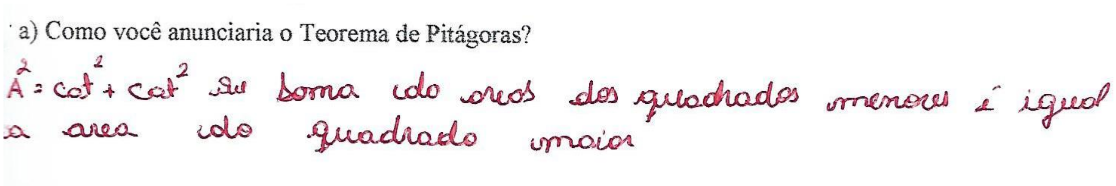

a) Como você anunciaria o Teorema de Pitágoras?
$\hat{A}^2 = cat^2 + cat^2$ se soma do areas dos quadrados menores é igual a area do quadrado maior

Figura 12. Atividade 5 – construção da etapa 5 da dupla B.
Fonte: arquivo pessoal.

Segundo a teoria de Van Hiele, os alunos não atingiram o nível 5 do rigor, pois não conseguiram estabelecer, nem demonstrar corretamente o enunciado do teorema de Pitágoras, ao qual corresponde a quinta fase, "integração", onde se forma uma visão geral do conteúdo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, procurou-se aplicar e analisar uma atividade de ensino realizada por uma professora, autora do artigo, sob a égide do segundo autor, como forma de utilizar conhecimentos adquiridos durante uma disciplina de geometria de um curso de mestrado, na qual foram desenvolvidos conteúdos de geometria fractal e Teoria de Van Hiele, dentre outros. A opção escolhida teve como objetivo utilizar algumas noções de geometria euclidiana de alunos de um nono ano do Ensino Fundamental, para perceberem a necessidade de conhecer alguns aspectos de geometria fractal a fim de melhor compreenderem o mundo em que vivem.

Num primeiro momento, em sala de aula, os estudantes identificaram, dentre uma coleção de figuras, aquelas que se assemelhavam a alguma forma geométrica euclidiana e outras que apresentavam uma forma mais voltada a elementos da natureza. Com isso, foram estimulados a associar dois tipos de geometria: a euclidiana, sobre a qual tinham alguns conhecimentos e uma outra, que precisariam investigar. Com isso verifica-se que a atividade explorou o modelo de desenvolvimento do raciocínio geométrico preconizado na teoria de Van Hiele, pois as atividades foram programadas de modo a avançar em tais níveis.

A partir disso, ainda em sala de aula, foi proporcionada uma atividade de separação de uma couve-flor em partes do todo, após obtidas fotos das partes, ampliadas e comparadas com o todo, de modo que pudessem observar similaridades da parte com o todo, o que levou os alunos a perceberem diferenças entre um objeto euclidiano e um não euclidiano. Ao identificar figuras dos grupos categorizados, atenderam ao primeiro nível da teoria de Van Hiele, na medida que associaram uma forma geral fornecida com alguma geométrica.

Na sequência da investigação, a professora conduziu os estudantes para o laboratório de informática, onde eles utilizaram o software Geogebra para a construção do fractal denominado Árvore Pitagórica, o qual permitiu explorar, além de propriedades euclidianas como medidas de comprimento, perímetro, área, reta, ponto, segmento de reta, ângulos, polígonos, regiões poligonais, quadrado, triângulo, círculo, circunferência, interseção, reflexão e simetria, o teorema de Pitágoras, conteúdo próprio do nível de escolaridade dos estudantes e constante do programa do ano/série. Com isso, pode-se concluir que as atividades proporcionaram aos alunos progredir, seguindo uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto eles aprendiam ou reviam os de geometria euclidiana, obedecendo à sequência de atividades elaboradas pela professora, seguindo os níveis da teoria de Van Hiele.

A investigação mostrou que a metodologia de ensino e as atividades utilizadas contribuíram para o aprendizado dos alunos, o que pode ser constatado pelas tarefas realizadas nesta pesquisa e, depois, nas aulas de Matemática, além de constatar que os alunos se encontram no nível 4 da dedução, onde começam a entender noções de geometria fractal, a significância da dedução e o papel do teorema de Pitágoras, não chegando ao rigor do enunciado do mesmo, o que, em geral, é indicado, na literatura, como um conhecimento alcançado ao final de uma licenciatura em Matemática.

A análise das atividades realizadas permitiu perceber que a visualização de elementos, tanto euclidianos, quanto não euclidianos e a troca de ideias aliadas à teoria de Van Hiele, proporcionaram aumentar o desenvolvimento do raciocínio em geometria entre os envolvidos, o que pode ser comprovado na avaliação final da disciplina, onde conseguiram associar, em diferentes representações de triângulos retângulos, a aplicação correta do teorema de Pitágoras, para resolver problemas propostos, na percepção da existência de outras geometrias, como na construção do fractal Árvore Pitagórica, durante a atividade, e sua relação com o teorema. As compreensões do teorema de Pitágoras que, em momentos anteriores, ofereceram algumas dificuldades, tornaram mais eficiente a aprendizagem dos alunos, além de terem proporcionado a introdução de noções da geometria fractal que, em geral, não é estudada nesse nível de escolaridade.

REFERÊNCIAS

BRUNET, A. R. G.; LEIVAS, J. C. P.; LEYSER, M. Semelhança de triângulos: o desafio de (re)construir práticas em sala de aula. In: **Educação Matemática em Revista**/ Sociedade Brasileira de Educação Matemática do Rio Grande do Sul (SBEM-RS). v.1, n.1(1999). Canoas: Ed. ULBRA, 2007.

JANOS, M. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2008.

JELINEK, K. R.; KAMPFF, A.J.C. A geometria que existe além do olhar: levando a geometria da natureza para dentro da escola. **Educação matemática em revista**/ Sociedade Brasileira de Educação Matemática do Rio Grande do Sul (SBEM-RS). v.1, n.10 (2009) – Canoas: Ed. ULBRA, 2009.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. P. **Geometria segundo a Teoria de Van Hiele.** Rio de Janeiro: Projeto Fundão, IM/UFRJ, 1998.

NASSER, L., et al. **Geometria segundo a Teoria de Van Hiele** – 3. ed. Instituto de Matemática/ UFRJ - Projeto fundão, 2000.

PADILHA, T. APARECIDA F. **Conhecimentos Geométricos e Algébricos a partir da construção de fractais com uso do software GeoGebra.** Dissertação de Mestrado. Lajeado/RS. UNIVATES, 2012.

TOMEI, C. **Euclides - A conquista do espaço.** São Paulo: Odysseus Editora, 2003.

VILLIERS, M. de. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. In: **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.12, n.3, pp.400-431, 2010. Disponível em: <revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/5167/3696>. Acesso em: 21 set. 2016.

ANEXO A

Fonte: https://pixabay.com/pt/bola-futebol-esporte-reflex%C3%A3o-novo-306820/

Fonte: http://donaflorgarden.com.br/enciclopedia/samambaia/


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Rel%C3%A2mpago


Fonte: http://www.apaixonados.com/caixas-27


Fonte: http://lucrearte.com/atacado/porta-retrato-mdf/


Fonte: arquivo pessoal.


Fonte: arquivo pessoal.


Fonte: http://www.meucopo.com

MINIBIOGRAFIA

José Carlos Pinto Leivas (leivasjc@unifra.br)
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6876-1461

Possui graduação em Matemática pela Universidade Católica de Pelotas (1974), especialização em Matemática na área de Análise pela Universidade Federal de Pelotas (1982) e mestrado em Matemática Pura pela Universidade Federal de Santa Catarina (1985). Em 2009 concluiu mais uma etapa em sua formação com o Doutorado em Educação na Linha de Pesquisa em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná, escrevendo uma tese em Geometria - Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. É professor titular aposentado pela Universidade Federal do Rio Grande - FURG. Foi professor adjunto da Universidade Luterana do Brasil, atuando no Curso de Licenciatura em Matemática e no Curso de Especialização em Educação Matemática. Atuou também como professor em duas disciplinas no Curso de Pedagogia a Distância. Atualmente, é professor do Programa de Pós Graduação em Ensino em Ciências e Matemática da Universidade Franciscana de Santa Maria - UFN. Foi editor da revista EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA da SBEM-RS. Foi diretor regional da SBEM-RS e participou da diretoria nacional da mesma sociedade no período 2004-2007. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Geometria e Topologia, atuando, principalmente, nos seguintes temas: geometria, educação e ensino, formação de professores, prática de ensino. Foi coordenador do Curso de Matemática da FURG por mais de dez anos e do Curso de Especialização em Matemática, além de várias funções administrativas na mesma instituição. Eleito vice coordenador do GT4-Ensino Superior - da SBEM em outubro de 2012 até.2015 e na sequência o coordenador, até o momento. Eleito diretor regional da SBEM-RS, em 03 de agosto de 2018 para o triênio 2018-2021.
Líder do GEPGEO – Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria. https://g3pgeo.wixsite.com/gepgeo

Link para currículo:
http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4787065Y1

Anne Desconsi Hasselmann Bettin (nanydh@yahoo.com.br)
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1834-164X
Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Centro Universitário Franciscano (UNIFRA/ 2017), graduada em Ciências Contábeis pelo Centro Universitário (UNISEB/ 2014) e graduação em Matemática Licenciatura Plena pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM/ 2007). Atualmente é professora de matemática na Rede de Ensino do Rio Grande do Sul, Santa Maria, RS, Brasil. Integrante do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria. https://g3pgeo.wixsite.com/gepgeo

Link para currículo:
http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4253336P3